UNED

PRUEBA DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 AÑOS

MATEMÁTICAS II

SEPTIEMBRE 2010

(ACIERTO +1, ERROR -0,25, SIN CONTESTAR 0)

1. El valor d $\lim_{x\to 0}\frac{4(1-\cos x)}{x}$ es:

a) 1

b) 2

c) 0

d) ∞

$$\lim_{x\to 0}\frac{4(1-\cos x)}{x}=\frac{0}{0}=indeterminación$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4(1-\cos x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4(sen\ x)}{1}=0$$

2. El valor de la integral $\int_2^6\frac{1}{x+2}dx$ es:

a) log 2

b) 2

c) arc tg 8 - arc tg 4

d) tg 8 - tg 4

$$\int_2^6\frac{1}{x+2}dx=Ln|x+2|]_2^6=Ln8-Ln4=Ln\frac{8}{4}=Ln2$$

3. ¿Para qué valor de a la función $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<3\\ x^2+ax, & x\geq 3\end{cases}$ es continua en todo $\mathbb{R}$?

a) $-\frac{5}{3}$

b) 0

c) 1

d) 3

Como cada tramo es continuo en $\mathbb{R}$ estudiamos la continuidad en el punto en el que cambia el tramo, es decir en x=3

Para que una función sea continua tiene que cumplirse que $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

$f(3) = 3^2 + a3 = 9 + 3a$

$\lim_{x \to 3^-} x + 1 = 4$

$\lim_{x \to 3^+} x^2 + ax = 9 + 3a$

Si igualamos las condiciones resulta $9 + 3a = 4; a = -\frac{5}{3}$

Por tanto $f(x)$ será continua en $x = 0$ si $a = -\frac{5}{3}$

4. La función $f(x) = (x-7)^3 + 1$ verifica:

a) En x= 7 tiene un máximo

b) En x=7 tiene un punto de inflexión

c) En x=7 tiene un mínimo

d) Es discontinua en x=6

$$f'(x) = 3(x-7)^2$$

$$3(x-7)^2 = 0; x = 7\ (posible\ máximo\ o\ mínimo)$$

$$f''(x) = 6(x-7)$$

$$f''(7) = 0\ no\ es\ ni\ máximo\ ni\ mínimo$$

$$f''(x) = 6(x-7)$$

$$6(x-7) = 0; x = 7$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f'''^{(7)} = 6 \neq 0$$

Tiene un PUNTO DE INFLEXIÓN en x= 7.

5. Una mano de mus consta de 4 cartas del conjunto de 40 cartas de la baraja española. ¿Cuántas manos de mus contienen 2 oros y 2 copas?

a) 2025

b) 1000

c) 165

d) 6125

No influye el orden y son combinaciones de 10 elementos tomados de 2 en 2.

Formas de extraer 2 oros de entre 10 oros de la baraja $\binom{10}{2}$

Formas de extraer 2 copas de entre 10 copas de la baraja $\binom{10}{2}$

Extraer 2 oros y 2 copas: $\binom{10}{2}\binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}\cdot\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1} = 45\cdot 45 = 2025$

6. La derivada de la función $f(x) = x^2e^{-x}$ es:

a) $f'(x) = 2xe^{-x}$

b) $f'^{(x)} = (2x - x^2)e^{-x}$

c) $f'^{(x)} = -\frac{x^3}{3}e^{-x}$

d) $f'^{(x)} = 2x + e^{-x}(-1)$

$$f'^{(x)} = 2x(e^{-x}) + x^2(-1)e^{-x} = \frac{2x - x^2}{e^x} = (2x - x^2)e^{-x}$$

7. Sea α el ángulo que forman las rectas $r \equiv x - 3 = 0$ y $s \equiv x - y + 2 = 0$. Entonces el $cos\ \alpha$ vale:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

a) $\frac{2\sqrt{3}}{2}$

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

El vector director de r es $\vec{v}\ (0,1)$ y el vector director de s es $\vec{u}\ (1,1)$

$$cos\ \alpha = \frac{(0,1)(1,1)}{1\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

8. Una solución (x_1, y_1, z_1) del sistema $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ 3x+y+3z=-2 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ verifica:

a) $x_1 = 6; y_1 = -4;\ z_1 = -3$

b) $x_1 \le 2;\ y_1 \le -2;\ z_1 \le 1$

c) $x_1 - z_1 = 9$

d) $y_1 - z_1 = 5$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Estudiamos el rg (A)

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$= 1≠ 0 por tanto rg (A)=3

rg(A)=rg(A')=3 , por tanto $\forall a$ el sistema es Compatible Determinado.

Para resolver el sistema utilizamos Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{6}{1} = 6$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-11}{1} = -11$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-3}{1} = -3$$

Solución del sistema: $(6, -11, -3)$, por tanto $x_1 - z_1 = 9$

9. La parte real del complejo $\frac{(3+2i)+i^{21}}{i^{147}(1-i^7)}$ es:

a) $-\frac{1}{2}$

b) 0

c) $-\frac{3}{2}$

d) 1

Dividimos 21 entre 4 y nos quedamos con el resto, por tanto $i^{21} = i^1 = i$

Dividimos 147 entre 4 y nos quedamos con el resto, por tanto $i^{147} = i^3 = -i$

Dividimos 7 entre 4 y nos quedamos con el resto, por tanto $i^7 = i^3 = -i$

Por tanto

$$\frac{(3+2i)+i^{21}}{i^{147}(1-i^7)} = \frac{(3+2i)+i}{-i(1+i)} = \frac{3+3i}{1-i} = \frac{(3+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{6i}{2} = 3i$$

La parte real de este número complejo es 0, ya que se trata de un número "imaginario puro".

10. ¿Para qué valores de b y c los vectores $\boldsymbol{u} = (\mathbf{1}, -\mathbf{2}\boldsymbol{b}, \mathbf{2})$ y $\boldsymbol{v} = (\mathbf{3}, -\mathbf{1}, -\mathbf{4}\boldsymbol{c})$ son linealmente dependientes?

a) $\boldsymbol{b} = \frac{1}{6}; \boldsymbol{c} = -\frac{3}{2}$

b) $\boldsymbol{b} = \frac{2}{3}; \boldsymbol{c} = -\frac{1}{3}$

c) $\boldsymbol{b} = -\frac{1}{6}; \boldsymbol{c} = -\frac{4}{3}$

d) $\boldsymbol{b} = \frac{3}{4}; \boldsymbol{c} = -\frac{1}{3}$

Para que sean linealmente dependientes tienen que ser directamente proporcionales

$$\frac{1}{3} = \frac{-2b}{-1} = \frac{2}{-4c}$$

De donde obtenemos $b = \frac{1}{6}$ y $c = -\frac{3}{2}$