OPCION A

Problema 1

a) *La función es continua en cualquier punto distinto de o, donde hacemos su estudio:*

Continuidad en x=0

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0 \Rightarrow \ la\ función\ es\ continua\ en\ x = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(1-x)}{1-x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = L'HOPITAL = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{-1}{1-x}}{-1} = 0$$

b)

$$f(x) = xe^{-x} \Rightarrow f'(x) = e^{-x}(1-x)$$

$$m = f'(2) = -e^{-2} \qquad f(2) = 2e^{-2}$$

$$y - 2e^{-2=-e^{-2}}(x-2)$$

c)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{\ln(1-x)}{1-x}dx + \int_{0}^{1} xe^{-x}\,dx = -\left[\frac{(\ln(1-x))^2}{2}\right]_{-1}^{0} - [e^{-x}(x+1)]_0^1$$
$$= \frac{\ln(2)}{2} + 1 - 2e^{-1} = 0{,}5$$

Problema 2

a)

$$(CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}X(CD)^{-1} = A + X(D^{-1}C^{-1} - B) \Rightarrow X(CD)^{-1} - X(D^{-1}C^{-1} - B) = A$$
$$\Rightarrow XB = A \Rightarrow X = AB^{-1}$$

b)

$$YB = A \ \Rightarrow Y = AB^{-1}Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \\ \frac{-1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Problema 3

a)

$$\vec{u}_{\pi 1} \parallel \vec{u}_{\pi 2} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{a} = \frac{-1}{1} \Rightarrow a = -1$$

b)

$$\vec{u}_{\pi 1} \perp \vec{u}_{\pi 2} \Rightarrow \vec{u}_{\pi 1} \cdot \vec{u}_{\pi 2} = a + a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

c)

$$\pi \equiv x - y = 0 \Rightarrow \vec{u_\pi} = (1,-1,0)$$

$$\vec{u_r} = \vec{u_{\pi 1}} x \vec{u_{\pi 2}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = (a+1, -(a+1), a^2 - 1) = (a+1)(1,-1,a-1)$$
$$= \lambda(1,-1,0) \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

Pero en este caso los planos son paralelos y, por tanto, no es posible encontrar la recta pedida para ningún valor de a

Problema 4

a) $\pi: \begin{cases} \vec{AB} = (1,-5,1) \\ \vec{AC} = (2,-1,2) \\ A = (0,2,-1) \end{cases} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y-2 & z+1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - z - 1 = 0$

Hacemos lossiguientespasos: Calculamosunarectar $\perp$ πconP $\in$ rr: $\begin{cases} \vec{u_r} = \vec{u_\pi} = (1,0,-1) \\ P_r = (2,1,-1) \end{cases}$

$\Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$ Calculamos el punto de corte P'de r con π

$$2 + \lambda - (-1 - \lambda) - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow P'(1,1,0)$$

El punto P'es el punto medio entre P y el punto que buscamos

P''

$$\frac{P'' + P}{2} = P' \Rightarrow P'' = 2P' - P = (0,1,1)$$

OPCION B

Problema 1

a)

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & m+1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2$$

$$Si\ m \neq \pm 2\ \ rango(A) = rango(A') = 3 = n^o\ de\ incognitas$$

$Si\ m = -2$

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -28 \neq 0 \Rightarrow rango(A') = 3$$

$Si\ m=2$

$$A'=\begin{pmatrix}3&1&2&1\\1&-1&2&-2\\5&3&2&4\end{pmatrix}\Rightarrow Todos\ los\ menores\ de\ orden\ 3\ son\ 0\Rightarrow\begin{vmatrix}3&1\\1&-1\end{vmatrix}=-4\neq 0$$
$$\Rightarrow rango(A')=2$$

Si m=-2 rango(A)≠rango(A')⇒ SI

Si m=2 rango(A)=rango(A')=2< nº de incognitas⇒ SCI

b) $Si\ m=0$

$$\begin{cases}3x+y=1\\x-y+2z=-2\\5x+y+2z=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\y=7\\z=\dfrac{7}{2}\end{cases}$$

c)$Si\ m=2$

$$\begin{cases}3x+y+2z=1\\x-y+2z=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-1}{4}-\lambda\\y=\dfrac{7}{4}+\lambda\\z=\lambda\end{cases}$$

Problema 2

a)

$$\vec{AB}=(0,1,1)\ \vec{AC}=(2,-1,-1)\vec{AD}=(2,-2,-2)\Rightarrow\begin{vmatrix}0&1&1\\2&-1&-1\\2&-2&-2\end{vmatrix}=0\Rightarrow son\ coplanarios$$

$$\left|\vec{AB}\right|=\left|\vec{DC}\right|=\sqrt{2}\quad\left|\vec{AD}\right|=\left|\vec{BC}\right|=2\sqrt{2}\ \ Es\ un\ paralelogramo$$

b)

$$A=\left|\vec{AB}\ x\ \vec{AD}\right|=\left\|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&1&1\\2&-2&-2\end{vmatrix}\right\|=|(0,2,-2)|=2\sqrt{2}u^2$$

c)

$$Es\ el\ resultado\ que\ crear\ la\ recta\ perpendicular\ al\ plano\ que\ contiene\ al\ paralelogramo$$
$$y\ pasa\ por\ el\ centro\ de\ el\ mismo$$

$$P_m(A,C)=\left(1,\frac{9}{2},\frac{5}{2}\right)$$

$Calculamos\ el\ vector\ del\ plano\ del\ paralelogramo:$

$$\vec{u_\pi} = \vec{AB}\ x\ \vec{AD} = (0,2,-2) r: \begin{cases} \vec{u_r} = (0,2,-2) \\ P_r = (1, \frac{9}{2}, \frac{5}{2}) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{9}{2} + 2\lambda \\ z = \frac{5}{2} - 2\lambda \end{cases}$$

Problema 3

a)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad f''(x) = 6ax + 2b \; f'''(x) = 6a$$

$$\begin{cases} f'''(x) = 12 \Rightarrow 6a = 12 \Rightarrow a = 2 \\ f(1) = 3 \Rightarrow a + b + c + d = 3 \\ f'(1) = 1 \Rightarrow 3a + 2b + c = 1 \\ f''(1) = 4 \Rightarrow 6a + 2b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 3 \\ d = 2 \end{cases} f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 2$$

b)

$$g(x) = ax^2 + bx + c \quad g'(x) = 2ax + b \quad g''(x) = 2a \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

$$\int_0^1 3x^2 + bx + c\ dx = \left[x^3 + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_0^1 = \frac{b + 2c + 2}{2} = 5 \;\Rightarrow b + 2c = 8$$

$$\int_0^2 3x^2 + bx + c\ dx = \left[x^3 + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_0^2 = 2b + 2c + 8 = 14 \Rightarrow b + c = 3$$

$$\begin{cases} b + 2c = 8 \\ b + c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 5 \end{cases}$$

$$La\ función\ es\ f(x) = 3x^2 - 2x + 5$$

Problema 4

a)

$$f(x) = \begin{cases} 0\ si\ x \leq 0 \\ |x\ln x|\ si\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0\ si\ x \leqslant 0 \\ -x\ln x\ si\ 0 < x \leq 1 \\ x\ln x\ si\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 0\ si\ x \leqslant 0 \\ -\ln x - 1\ si\ 0 < x \leq 1 \\ \ln x + 1\ si\ x > 1 \end{cases}$$

Continuidad en $x = 0$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} (-x\ln x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{-\ln x}{\frac{1}{x}}\right) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = L'HOPITAL = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1/x}{-1/x^2}\right) = 0 \\ \lim_{x\to 0^-} (0) = 0 \end{cases}$$

$$f(0) = 0 \;\Rightarrow f\ es\ continua\ en\ x = 0$$

$$Continuidad\ en\ x = 1$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 1^+} (x\ln x) = 0 \\ \lim_{x\to 1^-} (-x\ln x) = 0 \end{cases}$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow f \text{ } es \text{ } continua \text{ } en \text{ } x = 1$$

$$Derivabilidad \text{ } en \text{ } x = 0$$

$$f'(0^-) = 0 \neq f'(0^+) = +\infty \Rightarrow f \text{ } no \text{ } es \text{ } derivable \text{ } en \text{ } x = 0$$

$$Derivabilidad \text{ } en \text{ } x = 1$$

$$f'(1^-) = -1 \neq f'(1^+) = +1 \Rightarrow f \text{ } no \text{ } es \text{ } derivable \text{ } en \text{ } x = 1$$