UNIVERSIDAD REY JUAN CARLOS, MADRID

PRUEBA DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 AÑOS

MATEMÁTICAS II

AÑO 2014

OPCIÓN A

Ejercicio 1

a) (1 punto) Determinar el valor del parámetro λ para que los puntos A(1,2,0), B(5,-4,0) y C(2,λ,0) estén alineados.

Para que A, B y C estén alineados se tiene que cumplir que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB}(4,-6,0)$ y $\overrightarrow{BC}(-3,\lambda+4,0)$

Como $\overrightarrow{AB}$ tiene que ser igual o proporcional a $\overrightarrow{BC}$:

$$\frac{4}{3} = \frac{-6}{\lambda+4} = 0$$

De donde obtenemos que estarán a lineados si $\lambda = \frac{1}{2}$

b) (1 punto) Sabiendo que A(1,2,0) es el punto medio del segmento PQ y que P(-1,2,0), calcula las coordenadas del punto Q.

La fórmula del punto medio del segmento PQ será $\left(\frac{-1+q1}{2}, \frac{3+q2}{2}, \frac{0+q3}{2}\right)$ = (1,2,0)

Despejamos $q1, q2\ y\ q3$, que serán las coordenadas del punto Q que buscamos:

$$\frac{-1+q1}{2} = 1\,;q1 = 3$$

$$\frac{2+q2}{2} = 2\,;q2 = 2$$

$$\frac{0+q3}{2} = 0\,;q3 = 0$$

Solución: Q(3,2,0)

Ejercicio 2

(2 puntos) Determinar el valor o los valores del parámetro a para los que el siguiente sistema es compatible determinado y resolver el sistema resultante para dicho valor o valores.

$$\begin{cases} \boldsymbol{3x+5y+3z=2a} \\ \boldsymbol{-x-2y+z=a+2} \\ \boldsymbol{x+2y=-1} \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 2a \\ -1 & -2 & 1 & a+2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rg (A)

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

por tanto rg (A)=3

rg(A)=rg$A$(')=3 , por tanto $\forall a$ el sistema es Compatible Determinado.

Para resolver el sistema utilizamos Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2a & 5 & 3 \\ a+2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{2a+1}{-1}=-2a-1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2a & 3 \\ -1 & a+2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-a}{-1}=a$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2a \\ -1 & -2 & a+2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-a-1}{-1}=a+1$$

Solución del sistema: $(-2a-1, a, a+1)$

Ejercicio 3

(1 punto) Calcular el valor del parámetro $a$para que sea continua la función real de variable real definida por:

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} ae^{2x}+x^2e^{-x}, & x \le 0 \\ x^2\,\mathrm{sen}(2x), & x>0 \end{cases}}$$

$f(0)=ae^0+0e^0=a$

$\lim_{x\to 0^-} ae^{2x}+x^2e^{-x}=a$

Como cada tramo es continuo en $\mathbb{R}$ estudiamos la continuidad en el punto en el que cambia el tramo, es decir en x=0

$\lim_{x\to 0^+} x^2\,\mathrm{sen}(2x)=0$

Para que una función sea continua tiene que cumplirse que $f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)$

Si igualamos las condiciones resulta $0=a$

Por tanto $f(x)$ será continua en $x=0$ $a=0$ si

Ejercicio 4

a) (1 punto) Hallar los valores del parámetro a para los que la siguiente matriz es invertible:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 5 \\ a & a & a^2 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Una matriz A es invertible si $|A| \neq 0$

Por tanto estudiaremos el determinante de la matriz dada:

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 & 5 \\ a & a & a^2 \\ 6 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 4a^2 - 9a$$

Igualamos el resultado del determinante a 0

$$4a^2 - 9a = 0; a = 0 \; y \; a = \frac{9}{4}$$

Por tanto la matriz será invertible si $a \neq 0$ y $a \neq \frac{9}{4}$.

b) (1 punto) Sabiendo que el vértice del cuadrado inscrito en la circunferencia contenida en el plano $z = 0$, centrada en el origen (0,0,0) y de radio 1 es el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, determina los otros tres vértices del cuadrado.

Si estamos en el plano $z = 0$, quiere decir que nos encontramos en el plano. Si dibujamos los datos del enunciado en unos ejes de coordenadas, y con la condición de radio 1, obtenemos que los otros vértices del cuadrado son $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

Ejercicio 5

Calcular los siguientes límites:

a)(1 punto) $\lim_{x\to 0} \frac{(3x-1)^3}{5x^3-3x^2+1} = \frac{(-1)^3}{1} = -1$

b) (1 punto) $\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-8}{3x^2-18x+24} = \frac{10}{-3}$

c) (1 punto) $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^2-3x+7}{5x^3-5x^2+2} = \frac{\infty}{\infty} = indeterminación; GN < GD = 0$

OPCIÓN B

Ejercicio 1

a) (1 punto) Hallar el ángulo que forman los planos $\pi_1 \equiv x + y + 3 = 0$ y $\pi_2 \equiv y - 2 = 0$.

El ángulo que formarán los planos será el mismo que formarán sus vectores normales.

$\vec{n}_1(1,1,0)$

$\vec{n}_2(0,1,0)$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

$$\cos\alpha = \frac{(1,1,0)\cdot(0,1,0)}{\sqrt{2}\cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = arc\cos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

b) (1 punto) Hallar el punto simétrico de A(2,1,0) respecto del plano $\pi_1 \equiv x - y = 0$

Hallamos la recta perpendicular al plano y que pasa por el punto A

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 0 \end{cases}$$

Hacemos la intersección de esta recta con el plano, y obtendremos el punto medio del segmento AA'

$$M = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$$

La fórmula del punto medio del segmento AA' será $\left(\frac{2+a1}{2}, \frac{1+a2}{2}, \frac{0+a3}{2}\right)$ y sabemos que el punto medio de este segmento es el $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$puesto que nos piden el simétrico respecto de él.

Despejamos $a1, a2\ y\ a3$, que serán las coordenadas del punto A' que buscamos:

$$\frac{2+a1}{2} = \frac{3}{2};\ a1 = 1$$

$$\frac{1+a2}{2} = \frac{3}{2};\ a2 = 2$$

$$\frac{0+a3}{2} = 0;\ a3 = 0$$

Solución: A' $(1,2,0)$

c) (1 punto) Hallar el punto simétrico de $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ respecto del origen (0,0,0).

La fórmula del punto medio del segmento PP' será $\left(\frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}+p1}{2}, \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+p2}{2}, \frac{0+p3}{2}\right)$ y sabemos que el punto medio de este segmento es el (0,0,0) puesto que nos piden el simétrico respecto de él.

Despejamos $p1, p2\ y\ p3$, que serán las coordenadas del punto P' que buscamos:

$$\frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}+p1}{2} = 0;\ p1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$-$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+p2}{2}=0; p2=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{0+p3}{2}=0; p3=0$$

Solución: P' $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2},0\right)$

Ejercicio 2

(2 puntos) Hallar las matrices cuadradas de orden 2 X e Y que verifican

$$\boldsymbol{X+2Y=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{2X+Y=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}}$$

Lo resolvemos como un sistema de ecuaciones:

$$-2X-4Y=-2\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$2X+Y=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

Y despejando obtenemos $X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$Y=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Ejercicio 3

(1 punto) Estudia la continuidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$\boldsymbol{f(x)}=\begin{cases}\boldsymbol{e^{-x}+x-1}, & x\le 0\\ \boldsymbol{(x-2)e^{x}sen(x)}, & 0<x\le 2\\ \boldsymbol{(2-x)}x^3e^{x^2}, & \boldsymbol{2}<x\end{cases}$$

Como cada tramo es continuo en $\mathbb{R}$ estudiamos la continuidad en los puntos en los que cambia el tramo, es decir en x=0 y x=2

Para que una función sea continua tiene que cumplirse que $f(x_0)=\lim_{x\to x_0}f(x)$

$x=0$

$f(0)=e^{-0}+0-1=0$

$\lim_{x\to 0^-} e^{-x}+x-1=0$

$\lim_{x\to 0^+}(x-2)e^{x}sen(x)=0$

Como cumple las condiciones de continuidad podemos decir que $f(x)$ es continua en $x=0$

$x=2$

$f(2)=(x-2)e^{x}sen(x)=0$

$\lim_{x\to 2^-}(x-2)e^{x}sen(x)=0$

$\lim_{x\to 2^+}(2-x)x^3e^{x^2}=0$

Como cumple las condiciones de continuidad podemos decir que $f(x)$ es continua en $x=2$ Por tanto $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 4

Calcula los siguientes límites

a) (1 punto) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-5x+6}=\frac{0}{0}=indeterminación$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)(x-1)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}(x-1)=1$

b) (1 punto) $\mathbf{lim}_{x\to\infty}\sqrt{\boldsymbol{x-3}}-\sqrt{\boldsymbol{x+3}}=\infty-\infty=indeterminación$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+3})(\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3})}{(\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3})}=\lim_{x\to\infty}\frac{-6}{(\sqrt{x-3}+\sqrt{x+3})}=0$

Ejercicio 5

(2 puntos) Determinar si la siguiente matriz es invertible o no y, en caso afirmativo, calcular su matriz inversa.

$$\begin{pmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{5}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{-3}\end{pmatrix}$$

Una matriz A es invertible si $|A|\neq 0$

Por tanto estudiaremos el determinante de la matriz dada:

$$\begin{vmatrix}3 & 5\\ -2 & -3\end{vmatrix}=1\neq 0$$

Por tanto la matriz es invertible.

Calculamos su inversa:

$$A^{-1}=\frac{(Adj\ A)^t}{|A|}$$

$$Adj\ A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -5 & 3\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 2 & 3\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 2 & 3\end{pmatrix}$$