UNIVERSIDAD REY JUAN CARLOS, MADRID

PRUEBA DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 AÑOS

MATEMÁTICAS II

AÑO 2013

OPCIÓN A

Ejercicio 1

a) (1 punto) Hallar los valores del parámetro a para los que la siguiente matriz es invertible:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

Una matriz A es invertible si $|A| \neq 0$

Por tanto estudiaremos el determinante de la matriz dada:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1$$

Igualamos el resultado del determinante a 0

$$a - 1 = 0; a = 1$$

Por tanto la matriz será invertible si $a \neq 1$

b) (2 puntos) Calcular la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y resolver la siguiente ecuación matricial o, lo que es lo mismo, calcular los valores de x, y, z, u para los que es cierta la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} & \boldsymbol{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Calculamos su inversa:

$$A^{-1} = \frac{(Adj\ A)^t}{|A|}$$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Según la ecuación matricial $AX = B$

Despejamos la X:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

Por tanto,

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

a) (1 punto) Determinar si son secantes o no el plano $\pi_1 \equiv x - y + 1 = 0$ y la recta r determinada por los puntos P(0,-1,1) y Q(-1,-1,-1).

Hallamos el vector director de la recta: $\overrightarrow{PQ}(-1,0,-2)$

Y el vector normal del plano: $\vec{n}\ (1,-1,0)$

Como no son proporcionales, sabemos que no son ni paralelos ni coincidentes, por tanto π_1 y r son SECANTES.

Para hallar el punto de intersección calculamos la intersección de la recta r y del plano π_1:

$$\pi_1 \equiv x - y + 1 = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 - \lambda \\ y = -1 \quad ; \lambda = 2 \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

Luego el punto de intersección es el (-2,-1,-3)

b) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta r del apartado anterior y al punto P(0,1,0).

Vamos a hallar la ecuación de un plano determinado por un punto y dos vectores directores. Uno de los vectores será el de la recta, ya que la contiene $\overrightarrow{PQ} = (-1,-2,-1)$.

El otro vector director será el que une el punto P y el punto de la recta $\overrightarrow{RQ}(-1,-2,-1)$. Y el punto es P(0,1,0)

$$\begin{vmatrix} X & Y+1 & Z \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2Y + 2 + 2Z - Y - 1 - 4X = 0$$

-4X+Y+2Z+1=0

c) (1 punto) Hallar la ecuación del plano paralelo a $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$ y que pasa por el punto P(0,0,1).

Determinamos un plano conociendo su vector normal y un punto por el que pasa.

El vector normal será el mismo que el del plano dado, ya que son paralelos. Por tanto tendrá la forma: $\pi_2 \equiv 2x + y + z + D = 0$

Para hallar D tomamos la condición del punto por el que pasa, y sustituimos sus coordenadas en la ecuación del plano: $2 \cdot 0 + 0 + 1 + D = 0; D = -1$

$$\pi_2 \equiv 2x + y + z - 1 = 0$$

<u>**Ejercicio 3**</u>

Dada la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x, & x \leq 0 \\ \dfrac{2x^2+3}{2x^2-7x+5}, & x > 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Estudia su continuidad.

El primer tramo es continuo en $\mathbb{R}$, sin embargo el segundo al tratarse de una función racional hay que estudiar en qué puntos está definida.

$$2x^2 - 7x + 5 = 0; x = \frac{5}{2} \text{ y } x = 1$$

Estos puntos están incluidos en el intervalo $x > 0$ por tanto esta función es discontinua en $x = \frac{5}{2}$ y $x = 1$.

Ahora estudiamos la continuidad en el cambio de tramo.

Para que una función sea continua tiene que cumplirse que $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

$x = 0$

$f(0) = e^0 - 0 = 1$

$\lim_{x \to 0^-} e^x - x = 1$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2x^2+3}{2x^2-7x+5} = \frac{3}{5}$$

Como no cumple las condiciones de continuidad puesto que $1 \neq \frac{3}{5}$ podemos decir que $f(x)$ es discontinua en $x = 0, x = \frac{5}{2}$ y $x = 1$.

b) (1 punto) Calcula $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x - x = \infty$

c) (1 punto) Calcula $\lim_{x \to \infty} f(x)$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+3}{2x^2-7x+5} = \frac{\infty}{\infty} = indeterminación; GN = GD$ $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$

<u>**Ejercicio 4**</u>

(1 punto) Halla los valores de x para los que el siguiente determinante es igual a cero:

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ -4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

Calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ -4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 5x^2 - 10x$$

$$5x^2 - 10x = 0; x = 0, x = 2$$

Por tanto el determinante es cero si $x = 0\ o\ x = 2$

OPCIÓN B

Ejercicio 1

(2 puntos) Hallar las coordenadas del punto simétrico del punto (-2,2) respecto de la recta de ecuación $x = y$. Haz un dibujo y razona la respuesta.

Para hallar el simétrico de un punto respecto de una recta, hallamos la recta que es perpendicular a la recta dada y que pasa por (-2,2).

$$-x - y = 0$$

Hallamos la intersección de las dos rectas, lo cual nos dará el punto medio del segmento PP':

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}; x = 0, y = 0$$

La fórmula del punto medio del segmento PP' será $\left(\frac{-2+p1}{2}, \frac{2+p2}{2}\right)$ = (0,0)

Despejamos p$1\ y\ p2$ que serán las coordenadas del punto P' que buscamos:

$$\frac{-2+p1}{2} = 0\,; p1 = 2$$

$$\frac{2+p2}{2} = 0\,; p2 = -2$$

Solución: P'(2,-2)

Ejercicio 2

a) (1 punto) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta r intersección de los planos $\pi_1 \equiv 2x + y - 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv -y + z = 0$.

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de los dos planos en función de un parámetro:

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases};$$

$$x = t; y = 1 - 2t, z = 1 - 2t$$

La ecuación paramétrica será:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \qquad r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

b) (2 puntos) Determinar la posición relativa (es decir, si se cortan en un punto, se cruzan, son paralelas o son coincidentes) de la recta s que pasa por los puntos P(1,1,0) y Q(0,1,1) y la recta r del apartado anterior.

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 - r \\ y = 1 \\ z = r \end{cases}$$

El vector director de r es $\vec{v}(1, -2, -2)$

El vector director de s es $\vec{u}(-1,0,1)$

Como no son proporcionales deducimos que no son ni paralelas ni coincidentes.

Para saber si son secantes o se cruzan:

Calculamos el vector que une r y s

$$\overrightarrow{PQ}(1,0,-1)$$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ Por tanto las rectas son SECANTES

$$\begin{aligned} t &= 1 - r \\ 1 - 2t &= 1; t = 0, r = 1 \\ 1 - 2t &= r \end{aligned}$$

Se cortan en el punto $(0,1,1)$

Ejercicio 3

(1 punto) Calcular el valor del parámetro a para que sea continua la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} xe^x - 1, & x \leq 0 \\ 2a - x^2, & x > 0 \end{cases}$$

Como cada tramo es continuo en $\mathbb{R}$ estudiamos la continuidad en los puntos en los que cambia el tramo, es decir en x=0.

Para que una función sea continua tiene que cumplirse que $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

$x = 0$

$f(0) = 0e^0 - 1 = -1$

$\lim_{x \to 0^-} x\, e^x - 1 = -1$

$\lim_{x \to 0^+} 2\,a - x^2 = 2a$

Para que cumpla las condiciones de continuidad $-1 = 2a; a = -\frac{1}{2}$

Por tanto $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ si $a = -\frac{1}{2}$

Ejercicio 4

Calcular los siguientes límites:

a)(1 punto) $\lim_{x \to \infty} \frac{(2x^2-1)^2 (x+1)^2}{x^6-2}$

$= \frac{\infty}{\infty} = indeterminación; GN = GD, \lim_{x \to \infty} \frac{(2x^2-1)^2 (x+1)^2}{x^6-2} = 4$

b) (1 punto) $\lim_{x \to 0} \frac{4x^2-3x}{2x^2-5x+9} = 0$

Ejercicio 5

(2 puntos) Determinar si la siguiente matriz es invertible o no y, en caso afirmativo calcular su matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Una matriz A es invertible si $|A| \neq 0$

Por tanto estudiaremos el determinante de la matriz dada:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Por tanto la matriz es invertible.

Calculamos su inversa:

$$A^{-1} = \frac{(Adj\ A)^t}{|A|}$$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$