UNIVERSIDAD REY JUAN CARLOS, MADRID

PRUEBA DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 AÑOS

MATEMÁTICAS II

AÑO 2012

OPCIÓN A

Ejercicio 1

(2 puntos) Obtener las matrices A y B que satisfagan el sistema:

$$\mathbf{2A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}}$$

$$\mathbf{A-3B=\begin{pmatrix}-4 & -3\\ -1 & 0\end{pmatrix}}$$

Lo resolvemos como un sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{2A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}}$$

$$-2A+6B=\begin{pmatrix}8 & 6\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}\frac{9}{7} & \frac{8}{7}\\ 0 & \frac{1}{7}\end{pmatrix}$$

Y despejando obtenemos $A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{7} & \frac{3}{7}\\ -1 & \frac{3}{7}\end{pmatrix}$

Ejercicio 2

(1 punto) Determinar la forma binómica del número complejo $\frac{2+i}{i^{1011}}$

Dividimos 1011 entre 4 y nos quedamos con el resto, por tanto $i^{1011}=i^3=-i$

Por tanto $\frac{(2+i)}{-i}=\frac{(2+i)(i)}{-i(i)}=\frac{2i-1}{1}=2i-1$

Ejercicio 3

a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-1}$ y que pasa por el punto P(2,0,1)

Vamos a hallar la ecuación de un plano determinado por un punto y dos vectores directores. Uno de los vectores será el de la recta, ya que la contiene $\vec{v}(2,1,-1)$.

El otro vector director será el que une el punto P y el punto de la recta $\overrightarrow{PQ}(-1,-3,-1)$. Y el punto es P(2,0,1)

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4x - 3y + 5z - 13 = 0$$

b) (1 punto) Hallar la ecuación continua de la recta que es paralela a los planos $\pi_1 \equiv x - 3y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - y + 3z - 5 = 0$ y que contiene al punto P(2,-1,5).

La recta que buscamos tendrá la misma dirección, es decir el mismo vector director que la que resulta de la intersección de los dos planos. Dicho vector director resulta de hacer el producto vectorial de los vectores normales a los planos:

$$\overrightarrow{n_1}(1,-3,1)$$

$$\overrightarrow{n_2}(2,-1,3)$$

$$\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -8\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k} = (-8,-1,5)$$

Por tanto la recta que buscamos es: $\frac{x-2}{-8} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{5}$

c) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P(1,1,1) y es perpendicular a la recta de ecuaciones paramétricas $x = t, y = 0, z = t$.

El vector normal del plano será el mismo que el de la recta a la que debe ser perpendicular. Por tanto tendrá la forma: $\pi \equiv x + z + D = 0$

Para hallar D tomamos la condición del punto por el que pasa, y sustituimos sus coordenadas en la ecuación del plano: $1 + 1 + D = 0; D = -2$

$$\pi \equiv x + z - 2 = 0$$

<u>**Ejercicio 4**</u>

Dada la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(\pi x)}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ ax^2 + b, & 1 < x < \infty \end{cases}$$

a) (2 puntos) Determinar los valores a y b para que f sea continua y $f(3) = 8$.

El segundo tramo es continuo en $\mathbb{R}$, sin embargo el primero al tratarse de una función racional hay que estudiar en qué puntos está definida.

$$x = 0$$

Por tanto la función del segundo tramo no está definida en $x = 0$.

Este punto no está incluido en el intervalo $0 < x \leq 1$ por tanto $f(x)$ es continua en $x = 0$.

Ahora estudiamos la continuidad en el cambio de tramo.

Para que una función sea continua tiene que cumplirse que $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$

$x = 1$

$f(1) = \frac{sen(\pi 1)}{1} = 0$

$\lim_{x \to 1^-} \frac{sen(\pi x)}{x} = 0$

$\lim_{x \to 1^+} ax^2 + b = a + b$

Para que cumpla las condiciones de continuidad puesto que $0 = a + b$

La segunda condición es que $f(3) = 8$, por lo que $f(3) = 9a + b = 8$

Resolvemos el sistema y obtenemos los valores:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 9a + b = 8 \end{cases}; a = 1, b = -1$$

Para que $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$ y $f(3) = 8$, $a = 1, b = -1$.

b) (1 punto) Calcula $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{sen(\pi x)}{x} = \frac{0}{0} = indeterminación$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{sen(\pi x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\pi \cos(\pi x)}{1} = \pi$$

Ejercicio 5

(1 punto) Hallar los valores de x para la que la siguiente matriz tiene inversa:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Una matriz A es invertible si $|A| \neq 0$

Por tanto estudiaremos el determinante de la matriz dada:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^2 - 8x + 12$$

Igualamos el resultado del determinante a 0

$$x^2 - 8x + 12 = 0; x = 6, x = 2$$

Por tanto la matriz será invertible si $x \neq 6 \; y \; x \neq 2$.

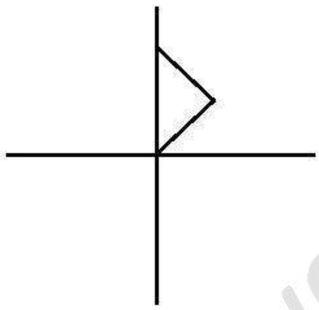
OPCIÓN B

Ejercicio 1

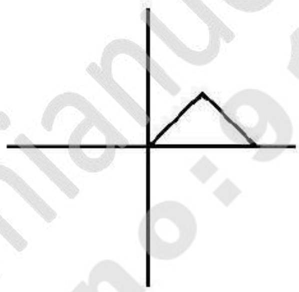
(2 puntos)

Un triángulo tiene de vértices A(0,0) y B(1,1). Hallar las coordenadas del tercer vértice C sabiendo que el triángulo es isósceles, que uno de sus lados está contenido en el eje OX y que su perímetro es $2+2\sqrt{2}$.

Como uno de sus lados tiene que estar situado en el eje x, descartamos la opción



Así que el triángulo estará situado así:



Como sabemos que tiene que su perímetro tiene que medir $2+2\sqrt{2}$, entonces $\overline{AB}$=$\overline{BC}$.

Por lo tanto el vértice C está situado en el (2,0).

Ejercicio 2

a) (1 punto) Hallar la distancia entre los planos $\pi_1 \equiv 2x+4y-2z-5=0$ y $\pi_2 \equiv x+2y-z-3=0$.

Sacamos los vectores normales de cada uno de los planos para saber su posición relativa:

$$\overrightarrow{n_1}(2,4,-2)$$
$$\overrightarrow{n_2}(1,2,-1)$$

Como son proporcionales deducimos que los planos son PARALELOS. Por lo tanto la distancia entre ellos será la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro plano.

$$P_{\pi_1}(1,0,-\frac{3}{2})$$

$$d(P,\pi_2)=\frac{|A\cdot p1+B\cdot p2+C\cdot p3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{1}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{12}u$$

b) (1 punto) Hallar el punto P(x,y) simétrico de Q(2,0) respecto de la recta $\boldsymbol{a\equiv x=2y}$.

Para hallar el simétrico de un punto respecto de una recta, hallamos la recta que es perpendicular a la recta dada y que pasa por Q(2,0).

$$2x+y-2=0$$

Hallamos la intersección de las dos rectas, lo cual nos dará el punto medio del segmento PP':

$$\begin{cases} x-2y=0 \\ 2x+y-4=0 \end{cases}; x=\frac{8}{5}, y=\frac{4}{5}$$

La fórmula del punto medio del segmento PQ será $\left(\frac{2+p1}{2},\frac{0+p2}{2}\right)=(\frac{8}{5},\frac{4}{5})$

Despejamos p$1\ y\ p2$ que serán las coordenadas del punto P que buscamos:

$$\frac{2+p1}{2}=\frac{8}{5}\,;p1=\frac{6}{5}$$
$$\frac{0+p2}{2}=\frac{4}{5}\,;p2=\frac{8}{5}$$

Solución: $P\left(\frac{6}{5},\frac{8}{5}\right)$

c) (1 punto) Determinar la forma binómica del número complejo $\boldsymbol{(1-i)^3}$.

$$(1-i)^3=(1-i)^2(1-i)=1-3i+3i^2-i^3=1-3i+3(-1)-(-i)=-2-2i$$

<u>Ejercicio 3</u>

Dada la función $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$\boldsymbol{f(x)}=\begin{cases} \dfrac{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{1})^2}{\boldsymbol{2x^2+1}}, & x\le 0 \\ \dfrac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{1}|+\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{1}}, & 0<x \end{cases}$$

a) (1 punto) Estudiar la continuidad de $\boldsymbol{f}$.

El primer tramo es continuo en $\mathbb{R}$, sin embargo el segundo al tratarse de una función racional hay que estudiar en qué puntos está definida.

$$x+1=0; x=-1$$

Este punto no está incluido en el intervalo $x>0$ por tanto esta función es continua.

Ahora estudiamos la continuidad en el cambio de tramo.

Para que una función sea continua tiene que cumplirse que $f(x_0)=\lim_{x\to x_0}f(x)$

$x = 0$

$$f(0) = \frac{(0+1)^2}{2\cdot 0^2 + 1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{(x+1)^2}{2x^2+1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x-1|+1}{x+1} = 2$$

Como no cumple las condiciones de continuidad puesto que $1 \neq 2$ podemos decir que $f(x)$ es discontinua en $x = 0$.

b) (2 punto) Calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{|x-1|+1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1+1}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x+1)^2}{2x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{(-x+1)^2}{2(-x)^2+1} = \frac{\infty}{\infty} = indeterminación; GN$$
$$= GD, \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

__Ejercicio 4__

a) (1 punto)Hallar la matriz inversa de $\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

Una matriz A es invertible si $|A| \neq 0$

Por tanto estudiaremos el determinante de la matriz dada:

$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{1} \neq \mathbf{0}$ **Por tanto la matriz tiene inversa.**

Calculamos su inversa:

$$A^{-1} = \frac{(Adj\ A)^t}{|A|}$$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

b) (1 punto) Resolver la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} & \boldsymbol{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Según la ecuación matricial $AX = B$ Despejamos

la X:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B$$

Por tanto,

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$