UNIVERSIDAD REY JUAN CARLOS, MADRID

PRUEBA DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 AÑOS

MATEMÁTICAS II

AÑO 2011

OPCIÓN A

Ejercicio 1

(2 puntos) Hallar el valor o los valores del parámetro a para los que el siguiente sistema es compatible determinado y resolver el sistema resultante para dicho valor o valores.

$$\begin{cases} -2x - y - 3z = a \\ 2x + y + 2z = 1 \\ 3x + y + 3z = a \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 & a \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & a \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rg (A)

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$ por tanto rg (A)=3

rg(A)=rg$A$(')=3 , por tanto $\forall a$ el sistema es Compatible Determinado.

Para resolver el sistema utilizamos Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2a}{1} = 2a$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & a & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & a & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2a+3}{1} = -2a+3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a-1}{1} = -a-1$$

Solución del sistema: $(2a, -2a+3, -a-1)$

Ejercicio 2

a) (1 punto) Determinar si son secantes o no el plano $\pi_1 \equiv 2x - 2z + 1 = 0$ y la recta r determinada por los puntos P(1,-2,0) y Q(1,0,1).

Hallamos el vector normal del plano y el vector director de la recta:

$$\vec{n}(2,0,-2)$$
$$\overrightarrow{PQ}(0,2,1)$$

Hacemos su producto escalar para comprobar si son ortogonales:

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = -2 \neq 0$ Por lo tanto si los vectores no son ortogonales significa que la recta y el plano no son ni paralelos ni coincidentes, por lo tanto son SECANTES.

b) (1 punto) Hallar la ecuación del plano paralelo a $\pi_1 \equiv 3x - y + z - 1 = 0$ y que pasa por el punto P(1,-1,1).

El plano paralelo tendrá el mismo vector normal que π_1. Por tanto tendrá la forma: $\pi \equiv 3x - y + z + D = 0$

Para hallar D tomamos la condición del punto por el que pasa, y sustituimos sus coordenadas en la ecuación del plano: $3 + 1 + 1 + D = 0; D = -5$

$$\pi \equiv 3x - y + z - 5 = 0$$

Ejercicio 3

Dada la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 2x - 1, & x < 0 \\ x^2 + x, & 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{2x^2 + x - 1}{2x^2 - 1}, & x > 1 \end{cases}$$

a) (1 punto) Estudia su continuidad

El primer y segundo tramo son continuos en $\mathbb{R}$, sin embargo el tercero al tratarse de una función racional hay que estudiar en qué puntos está definida. $2x^2 - 1 = 0 \to x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Estos puntos no están incluidos en el intervalo $x > 1$ por tanto esta función es continua.

Ahora estudiamos la continuidad en los cambios de tramo.

Para que una función sea continua tiene que cumplirse que $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$

$x = 0 \quad \lim_{x\to 0^+} x^2 + x = 0$

$f(0) = 0^2 + 0 = 0$

$\lim_{x\to 0^-} e^x - 2x - 1 = 0$

Como cumple las condiciones de continuidad podemos decir que $f(x)$ es discontinua en $x = 0$.

$x = 1$

$f(1) = no\ está\ definida$

$\lim_{x\to 1^-} x^2 + x = 2$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2 + x - 1}{2x^2 - 1} = 2$$

Como no cumple las condiciones de continuidad puesto que podemos decir que $f(x)$ es discontinua en $x = 1$.

b) (1 punto) Calcula $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{x} - 2x - 1 = \lim_{x\to\infty} e^{-x} - 2(-x) - 1 = +\infty$$

c) (1 punto) Calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{2x^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} = indeterminación; GN = GD;\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$$

Ejercicio 4

(2 puntos) Determinar si la siguiente matriz es invertible o no y, en caso afirmativo, calcular su matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Una matriz A es invertible si $|A| \neq 0$

Por tanto estudiaremos el determinante de la matriz dada:

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Por tanto la matriz es invertible.

Calculamos su inversa:

$$A^{-1} = \frac{(Adj\ A)^t}{|A|}$$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5

(1 punto) Sabiendo que $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$**, hallar la expresión en forma binómica del número o números complejos cuyo argumento sea** α **y cuyo módulo sea 2.**

El número en forma binómica será $a + bi$

$$a = r \cdot cos\alpha$$
$$b = r \cdot sen\alpha$$

$r = módulo = 2$

$$a = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$b = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Ya que hay dos ángulos que tienen el mismo coseno (un ángulo y su opuesto), la solución será $1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i$

OPCIÓN B

Ejercicio 1

(2 puntos) Hallar las coordenadas del punto simétrico del punto (1,2) respecto de la recta de ecuación $x = -y$. haz un dibujo y razona la respuesta.

Para hallar el simétrico de un punto respecto de una recta, hallamos la recta que es perpendicular a la recta dada y que pasa por (1,2).

$$x - y + 1 = 0$$

Hallamos la intersección de las dos rectas, lo cual nos dará el punto medio del segmento PP':

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}; x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$$

La fórmula del punto medio del segmento PP' será $\left(\frac{1+p1}{2}, \frac{2+p2}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Despejamos p$1\ y\ p2$ que serán las coordenadas del punto P' que buscamos:

$$\frac{1+p1}{2} = -\frac{1}{2}; p1 = -2$$

$$\frac{2+p2}{2} = \frac{1}{2}; p2 = -1$$

Solución: P'(-2,-1)

Ejercicio 2

a) (1 punto) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta $r$intersección de los planos $\pi_1 \equiv 3x - y + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv -x + z + 1 = 0$

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de los dos planos en función de un parámetro:

$$\begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ -x + z + 1 = 0 \end{cases};$$

$$x = t; y = 1 + 3t, z = -1 + t$$

La ecuación paramétrica será:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

b) (2 puntos) Hallar la ecuación del plano paralelo a $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 3 = 0$ y que pasa por el punto P(1,1,-2).

Determinamos un plano conociendo su vector normal y un punto por el que pasa.

El vector normal será el mismo que el del plano dado, ya que son paralelos. Por tanto tendrá la forma: $\pi_2 \equiv 2x + y + z + D = 0$

Para hallar D tomamos la condición del punto por el que pasa, y sustituimos sus coordenadas en la ecuación del plano: $2 \cdot 1 + 1 - 2 + D = 0; D = -1$

$$\pi_2 \equiv 2x + y + z - 1 = 0$$

Ejercicio 3

(1 punto) Calcular el valor de a para que sea continua la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -2xe^x + 1, & x \le 0 \\ 4a - 5x^2, & x > 0 \end{cases}$$

Como cada tramo es continuo en $\mathbb{R}$ estudiamos la continuidad en el punto en el que cambia el tramo, es decir en x=0

Para que una función sea continua tiene que cumplirse que $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$
$f(0) = -2 \cdot 0e^0 + 1 = 1$

$$\lim_{x \to 0^-} -2xe^x + 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} 4a - 5x^2 = 4a$$

Si igualamos las condiciones de continuidad resulta $1 = 4a$

Por tanto $f(x)$ será continua en $\mathbb{R}$ si $a = \frac{1}{4}$

Ejercicio 4

Calcular los siguientes límites:

a)(1 punto)

$\lim_{x \to \infty} \frac{(x^3-1)^2}{2x^6+3} = \frac{\infty}{\infty} = indeterminación; GN = GD; \lim_{x \to \infty} \frac{(x^3-1)^2}{2x^6+3} = \frac{1}{2}$

b) (1 punto) $\lim_{x \to 0} \frac{6x^2+5x}{3x^2-3x+5} = \frac{0}{5} = 0$

Ejercicio 5

a) (1 punto) Hallar el número complejo proporcional a $4 + 3i$ que tiene módulo 1.

Si calculamos el módulo del número que nos da obtenemos $|z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Por tanto para obtener un número complejo proporcional y que tenga módulo 1 habrá que dividir entre su módulo:

$$\frac{1}{5}(4 + 3i) = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$$

b) (1 punto) Hallar los valores de x para los que el determinante es igual a 0:

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^2 - 5x + 6$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0; x = 2, x = 3$$

Por tanto el determinante es cero si $x = 2\ o\ x = 3$