UNIVERSIDAD REY JUAN CARLOS, MADRID

PRUEBA DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 AÑOS

MATEMÁTICAS II

AÑO 2010

OPCIÓN A

Ejercicio 1

a) (1 punto) Hallar los valores del parámetro a para los que la siguiente matriz es invertible:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \boldsymbol{a+2} \\ \mathbf{2} & \boldsymbol{a+1} \end{pmatrix}$$

Una matriz A es invertible si $|A| \neq 0$

Por tanto estudiaremos el determinante de la matriz dada:

$$\begin{vmatrix} 3 & a+2 \\ 2 & a+1 \end{vmatrix} = a+1$$

Igualamos el resultado del determinante a 0

$$a+1=0; a=-1$$

Por tanto la matriz será invertible si $a \neq -1$

b) (2 puntos) Calcular la matriz inversa de la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y resolver la siguiente ecuación matricial o, lo que es lo mismo, calcular los valores de x, y, z, u para los que es cierta la siguiente igualdad

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos su inversa:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{(Adj\ A)^t}{|A|}$$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Según la ecuación matricial $AX = B$ Despejamos la X:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

Por tanto,

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

<u>Ejercicio 2</u>

a) (1 punto) Determinar si son secantes o no el plano $\pi_1 \equiv x - y + 1 = 0$ y la recta r determinada por el punto P(1,-1,1) y el vector director u=(1,0,1).

El vector director de la recta: $\vec{u}(1,0,1)$

Y el vector normal del plano: $\vec{n}\ (1,-1,0)$

Hacemos su producto escalar para comprobar si son ortogonales:

$\vec{u} \cdot \vec{n} = -1 \neq 0$ Por lo tanto si los vectores no son ortogonales significa que la recta y el plano no son ni paralelos ni coincidentes, por lo tanto son SECANTES.

También podríamos haber observado que como no son proporcionales, sabemos que no son ni paralelos ni coincidentes, por tanto π_1 y r son SECANTES.

Para hallar el punto de intersección calculamos la intersección de la recta r y del plano π_1:

$$\pi_1 \equiv x - y + 1 = 0$$
$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 1 + \lambda \end{cases} ;\ \lambda = -3$$

Luego el punto de intersección es el $(-2,-1,-2)$

b) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta r del apartado anterior y al punto P(0,1,2).

Vamos a hallar la ecuación de un plano determinado por un punto y dos vectores directores.

Uno de los vectores será el de la recta, ya que la contiene $\vec{u}(1,0,1)$.

El otro vector director será el que une el punto P y el punto de la recta $\overrightarrow{PQ}(-1,2,1)$. Y el punto es P(0,1,2)

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2x - 2y + 2z - 2 = 0$$

c) (1 punto) Hallar la ecuación del plano paralelo a $\pi_1 \equiv 3x + z - 1 = 0$ y que pasa por el punto P(2,0,1).

Determinamos un plano conociendo su vector normal y un punto por el que pasa.

El vector normal será el mismo que el del plano dado, ya que son paralelos. Por tanto tendrá la forma: $\pi_2 \equiv 3x + z + D = 0$

Para hallar D tomamos la condición del punto por el que pasa, y sustituimos sus coordenadas en la ecuación del plano: $3 \cdot 2 + 1 + D = 0; D = -7$

$$\pi_2 \equiv 3x + z - 7 = 0$$

Ejercicio 3

Dada la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} -2e^{2x}, & x \leq 0 \\ \dfrac{-4x^2+3}{2x^2-4x+2}, & x > 0 \end{cases}}$$

a) (1 punto) Estudia su continuidad.

El primer tramo es continuo en $\mathbb{R}$, sin embargo el segundo al tratarse de una función racional hay que estudiar en qué puntos está definida.

$$2x^2 - 4x + 2 = 0; x = 1$$

Este punto está incluido en el intervalo $x > 0$ por tanto esta función es discontinua en $x = 1$.

Ahora estudiamos la continuidad en el cambio de tramo.

Para que una función sea continua tiene que cumplirse que $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

$x = 0$

$f(0) = -2e^{2 \cdot 0} = -2$

$\lim\limits_{x \to 0^-} -2e^{2x} = -2$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-4x^2+3}{2x^2-4x+2} = \dfrac{3}{2}$

Como no cumple las condiciones de continuidad puesto que $-2 \neq \frac{3}{2}$ podemos decir que $f(x)$ es discontinua en $x = 0$ y en $x = 1$.

b) (1 punto) Calcula $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -2e^{2x} = \lim_{x \to \infty} -2e^{2(-x)} = 0$

c) (1 punto) Calcula $\lim_{x \to \infty} f(x)$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{-4x^2+3}{2x^2-4x+2} = \frac{\infty}{\infty} = indeterminación; GN = GD\ \lim_{x \to \infty} f(x) = -2$

<u>**Ejercicio 4**</u>

(1 punto) Hallar los valores de x para los que el siguiente determinante es igual a cero:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x^4} & \boldsymbol{x^2} \\ \boldsymbol{-4} & \boldsymbol{-2} \end{vmatrix}$$

Calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} x^4 & x^2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -2x^4 + 4x^2$$

$$-2x^4 + 4x^2 = 0; x = 0, x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$$

Por tanto el determinante es cero si

OPCIÓN B

Ejercicio 1

(2 puntos) Hallar la ecuación cartesiana de la recta r que pasa por el punto A(0,3) y es perpendicular a la recta s que pasa por los puntos B(0,0) y C(1,1). Si D es el punto de corte de r s y , calcular el área del triángulo que tiene como vértices los puntos A, B y D.

Para definir la recta necesitamos un punto y un vector director. el vector va a ser un vector ortogonal al vector director de la recta s.

el vector director de s es:

$$\vec{u} = \overrightarrow{BC} = (1,1)$$

El vector perpendicular a él será: (-1,1)

Por tanto la recta r tendrá la forma

$$x + y + D = 0$$

Para hallar D tomamos la condición del punto por el que pasa, y sustituimos sus coordenadas en la ecuación de la recta: $0 + 3 + D = 0; D = -3$

Por tanto la ecuación de r:

$$x + y - 3 = 0$$

Para hallar D hacemos la intersección de las dos rectas resolviendo el sistema:

$r \equiv x + y - 3 = 0$

$s \equiv \begin{cases} x = 0 + \lambda \\ y = 0 + \lambda \end{cases}; \lambda = \frac{3}{2}$

Luego el punto de intersección es el $D\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Para calcular el área del triángulo $A = \frac{b \cdot h}{2}$, BA será la base y $\frac{3}{2}$ será la altura.

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{9}{4} u^2$$

Ejercicio 2

a) (1 punto) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta r intersección de los planos $\pi_1 \equiv x + y + z - 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv -2y + z = 0$

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de los dos planos en función de un parámetro:

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases};$$

$$x = 1 - 3t; y = t, z = 2t$$

La ecuación paramétrica será:

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

b) (2 puntos) Determinar la posición relativa (es decir, si se cortan en un punto, se cruzan, son paralelas o son coincidentes) de la recta s que pasa por los puntos P(0,1,0) y Q(1,1,1) y la recta r del apartado anterior.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$$

El vector director de r es $\vec{v}(-3,1,2)$

El vector director de s es $\vec{u}(1,0,1)$

Como no son proporcionales deducimos que no son ni paralelas ni coincidentes.

Para saber si son secantes o se cruzan:

Calculamos el vector que une r y s

$$\overrightarrow{PQ}(-1,1,-2)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Por tanto las rectas SE CRUZAN.

Ejercicio 3

(1 punto) Calcular el valor del parámetro a para que sea continua la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} e^{2x} - 1, & x \leq 0 \\ 8a - 2x^2 - 1, & x > 0 \end{cases}}$$

Como cada tramo es continuo en $\mathbb{R}$ estudiamos la continuidad en el punto en el que cambia el tramo, es decir en x=0

$\lim_{x \to 0^-} e^{2x} - 1 = 0$

$\lim_{x \to 0^+} 8a - 2x^2 - 1 = 8a - 1$

$f(0) = e^{2 \cdot 0} - 1 = 0$

Para que una función sea continua tiene que cumplirse que $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

Si igualamos las condiciones de continuidad resulta $0 = 8a - 1\,;\, a = \frac{1}{8}$

Por tanto $f(x)$ será continua en $\mathbb{R}$ si $a = \frac{1}{8}$

Ejercicio 4

Calcular los siguientes límites

a)(1 punto)

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^3 - 5^3}{x - 5}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^3 - 125}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{(X - 5)(x^2 + 5X + 25)}{x - 5} = \lim_{x \to 5} (x^2 + 5X + 25) = 75$$

b) (1 punto)

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 - 2x + 7}{5x^2 - 2x + 9}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 - 2x + 7}{5x^2 - 2x + 9} = \frac{7}{9}$$

Ejercicio 5

a) (1 punto) Determinar la matriz X cuadrada de orden 2 que satisface la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Si expresamos la ecuación matricial como $AX = B$ Despejamos la X:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

Calculamos A^{-1}

Una matriz A es invertible si $|A| \neq 0$

Por tanto estudiaremos el determinante de la matriz dada:

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ Por tanto la matriz tiene inversa.

Calculamos su inversa:

$$A^{-1} = \frac{(Adj\ A)^t}{|A|}$$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Según la ecuación matricial $AX = B$

Por tanto,

$$X = A^{-1}B$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

b) (1 punto) Hallar el número complejo proporcional a $\boldsymbol{3+4i}$ que tiene módulo 1.

Si calculamos el módulo del número que nos da obtenemos $|z| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

Por tanto para obtener un número complejo proporcional y que tenga módulo 1 habrá que dividir entre su módulo:

$$\frac{1}{5}(3+4i) = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$