OPCIÓN A

1.

Dado el sistema de ecuaciones, $\left\{\begin{aligned} x-3y+7z&=2\\ 2x+y+7z&=4\\ x+y+mz&=0\end{aligned}\right.$

Se pide:

a)Estudiar la compatibilidadd del sistema en función de los valores de m.

M= $\begin{pmatrix}1 & -3 & 7\\ 2 & 1 & 7\\ 1 & 1 & m\end{pmatrix}$ $M" = \begin{pmatrix}1 & -3 & 7 & 2\\ 2 & 1 & 7 & 4\\ 1 & 1 & m & 0\end{pmatrix}$

C1 C2 C3 B

det M = m – 21 + 14 – 7 – 7 + 6m = 7m – 21 det
M = 0 ----» 7m – 21 = 0 ----» m = 3

1ºCaso:
m ≠ 3 rango M = 3 = rango M" sistena compatible determinado

2ºCaso:
m = 3
rango M = 2
$\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix} \neq 0$

det(C2,C3,B) = $\begin{vmatrix}-3 & 7 & 2\\ 1 & 7 & 4\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix} = 0 + 28 + 6 - 14 + 36 \neq 0$

RM´´=3

rango M ≠ rango M" sistema incompatible

b)Resolver el sistema para m = 1.

$\left\{\begin{aligned} x-3y+7z&=2\\ 2x+y+7z&=4\\ x+y+z&=0\end{aligned}\right.$ ----» F1 – F3 ----» $\left\{\begin{aligned} -4y+6z&=2\\ 2x+y+7z&=4\\ x+y+z&=0\end{aligned}\right.$ ----» F2 – 2F3 ----»

----» $\begin{cases} -4y+6z=2 \\ -y+5z=4 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ ----» $\begin{cases} -14z=-14 \\ -y+5z=4 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ ----» x = -2 ; y = 1 ; z = 1

-4F2+F3

Ejercicio 2.

Dados los puntos A(1,-2,2), B(3,0,1) y C(0,1,-3) se pide,

a)Hallar el área del triángulo de vértices A,B y C.

$\overrightarrow{AB} = (2,2,-1)$

$\overrightarrow{AC} = (-1,3,-5)$

$\vec{w} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + 11\vec{j} + 8\vec{k}$

$\vec{w} = (-7,11,8)$

$|\vec{w}| = \sqrt{(-7)^2+11^2+8^2} = \sqrt{234}$

A = ½ $\sqrt{234}$

b)Obtener la ecuación del plano π que contiene a los tres puntos.

$\overrightarrow{AX} = (x-1, y+2, z-2)$

$\det(\overrightarrow{AX},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -10(x-1) + 3(x-1) + y + 2 + 10(y+2) + 6(z-2) +$

$+ 2(z-2) = -7x + 11y + 8z + 13 = 0$

c)Obtener la ecuación de la recta que pasa por A y es paralela al vector $\overrightarrow{BC}$.

A (1, -2,2)

$\overrightarrow{BC}$ = (-3,1,4)

Ecuación de la recta : $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-4}$

Ejercicio 3.

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola y = - $x^2 + 5x - 3$ en el punto de abscisa x = 1.

y – f(a) = f´(a) – (x – a)

f(1) = -1^2 + 5*1 – 3 = 1
f´(x) = - 2x + 5 f´(1) = -
2*1 + 5 = 3

y – 1 = 3(x – 1) ----» y – 1 = 3x – 3

ecuación de la recta: 3x – y – 2 = 0

b) Hallar el área de la región limitada por la parábola y la recta que la corta perpendicularmente en el punto de abscisa x = 1.

Para y = 0 ; y = - $x^2 + 5x - 3$; $x^2 + 5x - 3$ = 0 siendo x = $\frac{5\pm\sqrt{5^2-4*3*1}}{2} = \frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$

$\int_{\frac{5-\sqrt{13}}{2}}^{1}(-x^2+5x-3)\,dx=-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-3x\Big|_{\frac{5-\sqrt{13}}{2}}^{1}=$

$=-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-3-\left(-\frac{\left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)^3}{3}+\frac{5\left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)^2}{2}-3\left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)\right)u^2$

Ejercicio 4

A **Sea la matriz cuadrada de orden 2 con determinante distinto de cero. Se define una nueva matriz** $B == A + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} A$

.

a)Determinar, de manera razonada, si la matriz B tiene, o no tiene, matriz inversa.

$B == A + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} A$

$B == \left[I + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right] A$

$B == \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} A$

$|B|= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} |A|=4|A| \neq 0$

B si tiene inversa.

b)Determinar la matriz A, sabiendo que B = $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$**.**

$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & t \\ -x+2z & -y+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ -x+3z & -y+3t \end{pmatrix}$

x + z = 0 ----» x = - z ----» x = 1
y + t = 4 ----» y + t = 4 ----»y = 4 – t ----»y = 2
-x + 3z = -4 ----» z + 3z = - 4 ----» z = - 1
-y + 3t = 4 ----» - y + 3t = 4 ----» -4 + t + 3t = 4 ----» 4t = 8 ----» t = 2

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

<u>OPCIÓN B</u>

Ejercicio 1.

Dada la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$ **, se pide :**

a)Determinar el rango de A en función de los valores de a.

det |A| = -2a^2 + 2 – 4a– 2 = -2a^2 – 4a det |A| = 0 ; -

2a^2 – 4a ; a=0 -2$a - 4 = 0$ ¸ $a = -2$

1ºCaso:

a = -2 rango A=2

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

2º Caso:

a=0

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

RA=2

Caso 3º

a ≠ 0 y a≠2 rango |A| = 3

b)Hallar la matriz inversa de A, en el caso a = -1.

$A^{-1} = (adj\ A)^t/\det A$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & a & 1 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$$

det |A| = -2 + 2 + 4 – 2 = 2

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (adj\ A)^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} / 2 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.

Dados el punto P(1,1, -2), el plano $\pi \equiv 2x - y + z + 1 = 0$ y la recta r

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

se pide,

a) Determinar la ecuación del plano que pasa por P, es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π.

$\vec{r} = (0,1,1)$ R = (2,0,0)

Ecuación de la recta paralela a $\vec{r}$ y que pasa por P:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ; \quad x - 1 + 2y - 2 - 2z - 4 + x - 1 = 0 \ ; \quad 2x + 2y - 2z - 8 = 0$$

El plano sería $\pi \equiv x + y - z - 4 = 0$

b) Hallar la distancia del punto P al plano π.

La distancia es 0 ya que el punto P pertenece al plano.

Ejercicio 3.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - cos2x + x}{x^2}$ **= indeterminación 0/0**

b) Realizamos l´hopital dos veces al persistir la indeterminación 0/0

$$\lim_{x\to 0} \frac{-e^{-x} + 2\sin 2x + 1}{2x} = \lim_{x\to 6} \frac{e^{-x} + 4\cos 2x}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-5)(x+3)}{(x-2)(-3x+1)} =$ **indeterminación** ∞/∞

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x-15}{-3x^2+7x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2+x-15}{x^2}}{\frac{-3x^2+7x-2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{1}+\frac{1}{x}-\frac{15}{x^2}}{\frac{-3}{1}+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}} = -3/2$$

Ejercicio 4.

Se considera la función f(x) = $\begin{cases} a - e^x & Si\ x < 0 \\ bx - a & Si\ x \geq 0 \end{cases}$

Donde a y b son constantes. Se pide,

a) Justificar de manera razonada que la función f(x) es continua y derivable para todo valor x≠ 0.

Si x≠0
Las funciones son continuas y derivables por ser suma de polinomios y exponenciales.

b) Calcular los valores de a y b, para los que la función f(x) es continua y derivable en x=0.

$\lim_{x\to 0^-} (a - e^x) = a - 1$

$\lim_{x\to 0^+} (bx - a) = -a$

f(0)=-a
$-a = a - 1$
-2a=-1
a=1/2

$f'(x) = \begin{cases} -e^x & Si\ x < 0 \\ b & Si\ x > 0 \end{cases}$

f´(0-)=-1
f´(0+)=b
b=1

c) ¿Cuáles son los valores de a y b, sabiendo que la función es continua en R, y que $\int_0^4 f(x)dx = 6$?

$$\int_0^4 \left(-x - \frac{1}{2}\right) dx = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x\Big|_0^4 = -8 - 2 - 0 = -10$$