**OPCIÓN A**

**a)Discutir el sistemade ecuaciones lineales siguiente en función del valor a:**

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{2x + ay + z = 5 - a}\\ &\boldsymbol{x - 2y + 2z = 2}\\ &\boldsymbol{3x + 2y + 3z = 3} \end{aligned}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad M" = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & a & 1 & 5-a \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} C1 & C2 & C3 & B \end{array} \end{array}$$

det M = -12 + 6a + 2 + 6 – 8 – 3a = 3a – 12
detM = 0 ----» 3a – 12 = 0 ----» a = 4

1ºCaso:

a ≠ 4

det M ≠ 0 ----» rango M = 3 = rango M" ----» sistema compatible determinado.

2ºCaso:

a = 4 ----» det M = 0 ----» rango M = 2 = rango M "----» sistema compatible indeterminado

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$ Todos los determinantes de tamaño 3 de la ampliada dan 0 RM´´=2 Sistema compatible indeterminado.

**b)Resolver el sistema si a = 4**

Aplicamos el método de GAUSS

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = 2 \\ 3x + 2y + 3z = 3 \end{cases} \text{----» F3 + F2} \quad \text{----»} \begin{cases} 2x + 4y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = 2 \\ 4x + 5z = 5 \end{cases} \text{----}$$

» F1 + 2F2 ----» ----» $\begin{cases} 4x + 5z = 5 \\ x - 2y + 2z = 2 \\ 4x + 5z = 5 \end{cases}$ ----» 4x = 5 – 5z ;
z = t ----» x = (5 – 5z)/4 = (5 – 5t)/4

x – 2y + z = 2 ----» x + z – 2 = 2y ----» y = (x + z – 2)/2 = $\frac{\frac{(5-5t)}{4}+t-2}{2} = \frac{-3-t}{8}$

**2)Sea el punto P = (1,0,1) en $R^3$ y el plano H : 4x – 2y + z = 1. Se pide :**

**a) Calcular la distancia P a H.**

P = (1,0,1)

Plano H: 4x – 2y + z = 1 ----» 4x – 2y + z -1 = 0

d(P, H) = $|Ax + By + Cz + D|/\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ = $|4 \times 1 - 2 \times 0 + 1 \times 1 - 1|\ /\sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2}$

d(P, H) = $4/\sqrt{21}$

**b)Calcular el punto simétrico P´, simétrico de P respecto de H, y la distancia entre P y P´.**

$\vec{n}_H$ = (4,-2,1)

r = $\begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = -2t \\ z = t + 1 \end{cases}$

hallamos M, punto medio $\overrightarrow{PP´}$

4(4t + 1) – 2(-2t) + t + 1 – 1 = 0 ----» 16t + 4 + 4t + t +1 -1 = 0 ----» 21t + 4 = 0 ----» t = -4/21

Coordenadas M: $\begin{cases} x = 4\left(-\frac{4}{21}\right) + 1 = -\frac{16}{21} + 1 = \frac{5}{21} \\ y = -2\left(-\frac{4}{21}\right) = \frac{8}{21} \\ z = -\frac{4}{21} + 1 = \frac{17}{21} \end{cases}$

Punto simétrico P´:

$M_x = (P_x + P´_x)/2$ ----» 5/21 = $(1 + P´_x)/2$ ----» $P´_x$ = -11/21

$M_y = (P_y + P´_y)/2$ ----» 8/21 = $P´_y/2$ ----» $P´_y$ = 16/21

$M_z = (P_z + P´_z)/2$ ----» 17/21 = $(1 + P´_z)/2$ ----» $P´_z$ = 13/21

Coordenadas P´= ( -11/21, 16/21 , 13/21)

**3.Calcular los valores de a y b para que la función definida a continuación sea continua y derivable en todos los puntos de su dominio:**

**f(x) = ( 3x + 3, si x<0; ax² + bx + 3, si 0≤x≤1; ax + 6, si x>1)**

Si $x \neq 0$ $y$ $x \neq 1$ f(x) es continua y derivable por estar formada por funciones polinómicas.
Continuidad
x=0

$\lim_{x\to 0^-} 3x + 3 = 3$

$\lim_{x\to 0^+} ax^2 + bx + 3 = 3$

f(0)=3

la función es continua en x=0 para todo a y b

x=1

$\lim_{x\to 1^-} ax^2 + bx + 3 = a + b + 3$

$\lim_{x\to 1^+} ax + 6 = a + 6$ ;

f(1)=a+b+3

a + 6 = a + b + 3 ----» b = 3

Derivavilidad

$$f´(x)=\begin{cases} 3 & Si\ x < 0 \\ 2ax + 3 & Si\ 0 \leq x < 1 \\ a & si\ x > 1 \end{cases}$$

x=0

$f´(0^-)=3$

$f´(0^+)=3$

La función siempre es derivable en x=0

x=1

$f´(1^-)=2a+3$

$f´(1^+)=a$

2a+3=a

a= -3

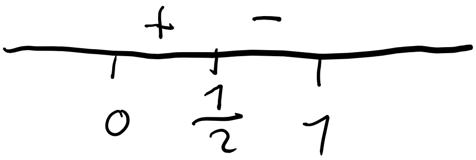
La función es derivable en x=1 Si a=-3

Si a=-3 y b=3 la función es continua y derivable en R

**b)Estudiar el crecimiento de f en el intervalo |0,1| para los valores de a y b hallados.**

f´(x) = 3 ----» f´(x) > 0 crecimiento f´(x) = 2ax + b; f´(x) = -6x + 3 =0;

x=1/2




Por tanto la función crece en el intervalo (-∞,1/2) y decrece en el intervalo (1/2,+ 1)

**4.Calcular los límites:**

**a)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{xcosx}{senx+xcosx}$ **= 0/0 Indeterminación**

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot cos\,x}{senx + x\cdot cos\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{cos\,x - xsenx}{cos\,x + cos\,x - x\cdot sin\,x} = \frac{1}{2}$$

**b)** $\lim\limits_{x\to 2-} \frac{4x-8}{\sqrt{4-x^2}}$ **= 0/0 Indeterminación**

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{4x-8}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(4x-8)\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}\cdot\sqrt{4-x^2}} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(4x-8)\sqrt{4-x^2}}{4-x^2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{4(x-2)\sqrt{4-x^2}}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-4\sqrt{4-x^2}}{(2+x)} = 0$$

**<u>OPCIÓN B</u>**

**1.**

**a)Demostrar que la matriz** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **es invertible sin clacular la inversa.**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = (adj\ A)^t$ /det A det A $\neq$ 0 invertible $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 - 4 = -9$

**b)Calcular la inversa de la matriz del apartado anterior.**

Adj A = $\begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ $(adj\ A)^t = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} / (-9) = \begin{pmatrix} 5/9 & 2/9 & -6/9 \\ 2/9 & -1/9 & 3/9 \\ -4/9 & 2/9 & 3/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/9 & 2/9 & -2/3 \\ 2/9 & -1/9 & 1/3 \\ -4/9 & 2/9 & 1/3 \end{pmatrix}$$

**c)Discutir en función del valor de a el sistema siguiente y resolverlo cuando sea posible:**

$$\boldsymbol{x + 2y = a}$$
$$\boldsymbol{2x + y + 3z = 1}$$
$$\boldsymbol{2y + z = 1}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M'' = \begin{array}{cccc} & C2 & C3 & B \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

det M = 1 – 6 – 4 = - 9
det M $\neq$ 0 rango M =3

rango M'' = 3

sistema compatible determinado para todo a

**a)Se considera el plano H: ax + 2y + z = 2 donde a es un número real. Sea l la recta dada por**

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 2t + 3 \\ z = t - 2 \end{cases}$$

**Calcular los valores que puede tomar a para que l y H sean paralelas y los valores que puede tomar a para que l y H sean perpendiculares.**

Paralelas:

(a,2,1) · (2,2,1) = 0 ----» 2a + 4 +1 = 0 ----» a = - 5/2

Perpendiculares:

$\vec{n} = (a,2,1)$

Vector director del plano y el vector director de la recta son proporcionales.

$\boldsymbol{\frac{a}{2} = \frac{2}{2} = \frac{1}{7} \Rightarrow a = 2}$

**b)Si a = - 5/2, calcular la distancia de l a H.**

H : -5/2 x + 2y + z = 2

$$l: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 2t + 3 \\ z = t - 2 \end{cases}$$

$$d(p_1\pi) = \frac{\left|-\frac{5}{2}\cdot 1 + 2\cdot 3 - 2 - 2\right|}{\sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{45}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{45}} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{15} u \cdot l$$

**3.Dada la función f(x) = $\boldsymbol{\frac{x^2+2}{x^2-2x-3}}$ , hallar sus asíntotas, si existen, calcular sus máximos y mínimos y hacer un esbozo de su gráfica.**

Asíntota vertical:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

X=3
X=-2

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2+2}{(x-3)(x+2)} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2+2}{(x-3)(x+2)} = +\infty$$
$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+2}{(x-3)(x+2)} = +\infty$$
$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+2}{(x-3)(x+2)} = -\infty$$

Asíntota horizontal:

Y= $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{(x-3)(x+2)} = 1$

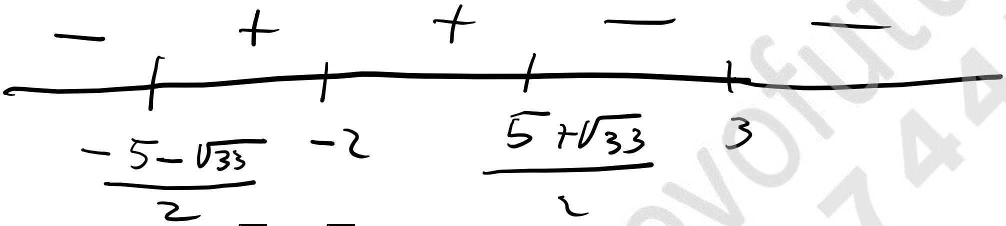
Y=1

Asíntota oblicua no tiene por tener asíntota horizontal.

f´(x) = $\frac{2x(x^2-2x-3)-(2x-2)(x^2+2)}{(x^2-2x-3)^2} = \frac{2x^3-4x^2-6x+(-2x+2)(x^2+2)}{(x^2-2x-3)^2} = \frac{-2x^2-10x+4}{x^4-4x^3-2x^2+12x+9}$

f´(x) = 0 - $2x^2$ – 10x + 4 = 0 ----» $x^2 + 5x - 2 = 0$

x = $\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4*1*(-2)}}{2*1}$ ----




Mínimo en $\left(\frac{-5-\sqrt{33}}{2}, \frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)$

Máximo en $\left(\frac{-5+\sqrt{33}}{2}, -\frac{\sqrt{33}-1}{8}\right)$

Corte con los ejes:

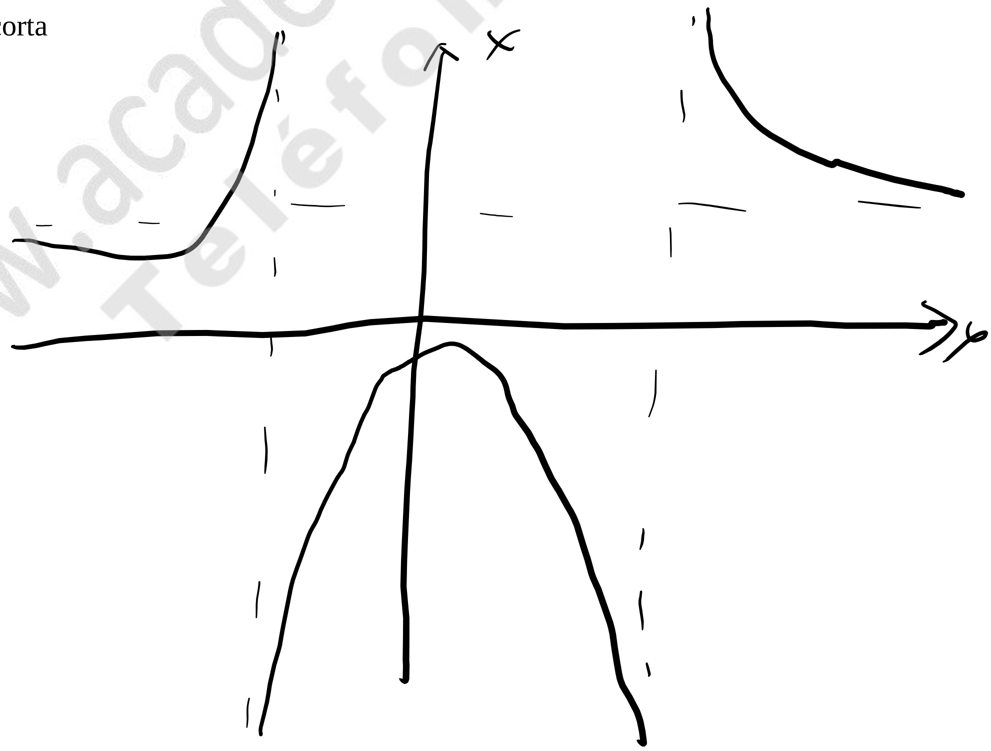
X=0

$\frac{0^2+2}{(0-3)(0+2)}$=-$\frac{1}{3}$

(0, -$\frac{1}{3}$)

Y=0

No corta



**4.Dada la función f(x) = $x^3 - 3x - 2$ se pide :**

**a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.**

f´(x) = $3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0$ ----» $x^2 = 3$

x ----» ( - ∞, -1)    (-1,1)    (1, + ∞)
f´(x)>0    f´(x)<0    f´(x)>0

( - ∞, -1) U (1, + ∞) Crece
(-1,1) Decrece

**b) Hallar los cortes con los ejes de la gráfica y los puntos de inflexión de f.**

x = 0 ; f(0) = - 2 ; (0,- 2)
y = 0 ;
$x^3 - 3x - 2 = 0$ ; (-1,0), (2,0)

Aplicando Ruffini las soluciones de lafunción son x = -1, 2.

f''(x) = 6x =0
x=0 posible punto de inflexión.
f´´´(x) = 6 ≠ 0 será por tanto punto de inflexión
f(0) = $0^3 - 3\cdot 0 - 2 = -2$
punto de inflexión (0,- 2)

**c) Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa x = 0 y en el punto x = - 1.**

En x=0
$y'(0) = -3$
y(0)=-2
y+2=-3·(x-0)
y+2=-3x
y=-3x-2
En x=-1
$y'(-1) = 0$

y(-1)=-1+3-2=0
y-0=0·(x+1)

y=0

**d) Hallar el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de la función f y por el eje de abscisas entre los puntos de abscisa x = - 1 y x = 0.**

$$A = -\int_{-1}^{0}(x^3 - 3x + 2)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\Big|_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2\right) = \frac{13}{4}u^2$$