OPCIÓN A

1.Dadas las matrices

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Se pide:

a)Hallar las matrices inversas de A y B.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x - z = 1 \\ 2y - t = 0 \\ 3z = 0 \\ 3t = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{t}{2} = \frac{1}{6} \\ z = 0 \\ t = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3x + z = 1 z = 1

3y + t = 0 t = -3

X= 0 x=0 Y=

1 y= 1

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Comprobar que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}\ A^{-1}$

$(A \cdot B)^{-1}$

A · B = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 2z = 1 \\ 5y + 2t = 0 \\ 3x = 0 \\ 3y = 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} z = \frac{1}{2} \\ t = -\frac{5}{2}t = -\frac{5}{6} \\ x = 0 \\ y = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

c)Encontrar la matriz X = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ solución de AX=B.

A · X = B
A^{-1}- A · X = A^{-1} · B
X = A^{-1} · B

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

2.Se considera un paralelogramo de vértices A,B,C y D.

a) Determinar los vértices C y D sabiendo que A = (1,2,-3) y B = (-2,1,0) son dos vértices consecutivos y que M = (1,-1,2) es el punto donde se cortan las diagonales del paralelogramo.

M = (1, -1, 2)
A = (1, 2, -3)
B = (-2, 1, 0)

D (x, y, z): $\frac{-2+x}{2} = 1$; $\frac{1+y}{2} = -1$; $\frac{z}{2} = 2$

x = 4 y = -3 z = 4

D (4, -3, 4)

C (a, b, c): $\frac{1+a}{2} = 1$; $\frac{2+b}{2} = -1$; $\frac{-3+c}{2} = 2$

a = 1 b = -4 c = 7

C (1, -4, 7)

b) Hallar el área del paralelogramo que tiene por vértices los puntos A,B,C y D del apartado anterior.

S (A B C D) = $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \sqrt{8^2 + 30^2 + 18^2} = \sqrt{1288} = 2\sqrt{322}$ u^2

$\overrightarrow{AB}$ = (-3, -1, 3)
$\overrightarrow{AD}$ = (3, -5, 7)

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 7 \end{vmatrix} =$$

$= 8\vec{i} + 30\vec{j} + 18\vec{k}$

3. Dada la recta

$$\frac{\boldsymbol{x-1}}{\mathbf{3}}=\frac{\boldsymbol{y+2}}{\mathbf{-2}}=\frac{\boldsymbol{z-3}}{\mathbf{-1}}$$

se pide:

a) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta s que es paralela a r y pasa por el punto (1,0,-1).

$\vec{s}$ = (3,-2,-1)   P(1,0,-1)

$$s = \begin{cases} x = 3t+1 \\ y = -2t \\ z = -t-1 \end{cases}$$

b) Hallar la distancia que hay entre las rectas r y s.

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{AP}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}} \frac{|10\vec{i}+12\vec{j}+6\vec{k}|}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{10^2+12^2+6^2}}{\sqrt{14}} = \frac{2\cdot\sqrt{70}}{\sqrt{14}} = 2\sqrt{5}\text{u.l.}$$

4. Determinar cuál es el valor más pequeño que toma el determinante de la matriz y el punto xεR en el que se alcanza dicho mínimo.

$$\begin{pmatrix} 1 & x & -1 \\ -1 & 1 & x \\ 3 & x & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ -1 & 1 & x \\ 3 & x & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3x^2 + x + 3 - x^2 + x = + 2x^2 + 2x + 4$$

f´= 4x +2   ;   f´= 0   ;   4x + 2 = 0   ;   x = - ½

f´´= 4 > 0 por tanto tenemos un mínimo-

OPCIÓN B

1.Encontrar las matrices X e Y solución del sistema

$$\begin{cases} 2X - Y = A \\ X + Y = B \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$X = B - Y$

$2(B - Y) - Y = A \dashrightarrow 2B - 2Y - Y = A \dashrightarrow 2B - 3Y = A \dashrightarrow 3Y = 2B - A \dashrightarrow$

$\dashrightarrow Y = \frac{2}{3}B - \frac{1}{3}A$

$$Y = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6/3 & 0 & -2/3 \\ 4/3 & 2/3 & 2/3 \\ -6/3 & 8/3 & 4/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & -3/3 & -4/3 \\ -2/3 & -1/3 & -3/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 & 1/3 & -4/3 \\ 4/3 & -1/3 & -2/3 \\ -8/3 & 7/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$X = B - Y = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5/3 & 1/3 & -4/3 \\ 4/3 & -1/3 & -2/3 \\ -8/3 & 7/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 4/3 & 5/3 \\ -1/3 & 5/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

2.En R^3se consideran los puntos A = (1,0,-1), B = (2,0,1) y C = (1,3,4).

a) Calcular el área del triángulo que tiene por vértices los puntos A, B y C.

$\overrightarrow{AB} = (1,0,2)$
$\overrightarrow{AC} = (0,3,5)$

$$\vec{w} = \vec{A}Bx\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -6\,i - 5j + 3\,\vec{k}$$

$\vec{w} = (-6, -5, 3)$
$\vec{w} = \sqrt{6^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{70}$

$A = ½ \sqrt{70}\, u^2$

b)Si D = (1,1,α), encontrar el valor de α∈R para que los puntos A,B,C y D sean coplanarios. Hallar la ecuación del plano que los contiene.

ABCD coplanarios si rango $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) = 2$

$\overrightarrow{AB} = (1,0,2)$
$\overrightarrow{AC} = (0,3,5)$
$\overrightarrow{AD} = (0,1,1+\alpha)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1+\alpha \end{vmatrix} = 0$$

;3 + 3α – 5 = 0 ----» - 2 + 3α = 0 ----» α = 2/3

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

6x+5y-3z-9=0

3.Calcular la derivada de la función

$f(x) = \sqrt{\frac{2-cosx}{3+senx}}$

$$f'_{(x)} = \frac{\frac{senx(3+senx)-\cos x(2-\cos x)}{(3+senx)^2}}{2\sqrt{\frac{2-\cos x}{3+senx}}} = \frac{\frac{3senx+(senx)^2-2\cos x+(cosx)^2}{(3+senx)^2}}{2\sqrt{\frac{2-\cos x}{3+senx}}} =$$

$$f'(x) = \frac{\frac{3senx-2\cos x+1}{(3+senx)^2}}{2\sqrt{\frac{2-\cos x}{3+senx}}} =$$

4. Hallar las siguientes integrals indefinidas:

a) $\int \frac{x-3}{(x-1)(x-2)}$**dx Descomponemos el integrando en fracciones simples**

Primer paso. Tenemos la descomposición factorial del denomminador:

(x – 1)(x – 2)

Segundo paso. Descomponemos en fracciones simples:

$\frac{x-3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)}$

Multiplicamos la igualdad por (x – 1)(x – 2) :

(x – 3) = (x – 2) A + (x – 1) B

Los valores de A y B se obtienen dando a x, sucesivamente, los valores de las raíces:

Para x = 1 - 2 = - A ; A = 2 Para

x = 2 - 1 = B

$\int \frac{x-3}{(x-1)(x-2)}dx = \int \frac{2}{(x-1)}dx + \int \frac{-1}{(x-2)}dx = 2 \int \frac{1}{(x-1)}dx - \int \frac{1}{(x-2)}dx = 2\ L\ |x - 1| - L\ |x - 2| + C$

b) $\int e^x senx\, dx$ **Integración por Partes:** 1ºIntegración

u = e^x.............dv = sen x dx

du = e^x dx........v = - cos x

∫u dv = u v - ∫v du

∫ e^x sen x dx = - e^x cos x - ∫- e^x cos x dx =- e^x cos x + ∫e^x cos x dx

2ºIntegración

u = e^x..........dv = cos x dx

du = e^x dx.....v = sen x

∫ e^x sen x dx = - e^x cos x + e^x sen x - ∫ e^x sen x dx

Como puedes vez llegamos a la Integral Original, juntamos las Integrales de lado Izquierdo de la igualdad por lo cual la Integral que tienes de lado derecho mandala al lado izquierdo pero con signo contrario y nos queda:

∫ e^x sen x dx + ∫ e^x sen x dx = - e^x cos x + e^x sen x

Sumamos Integrales y nos queda:

2∫e^x sen x dx = - e^x cos x + e^x sen x

El Número que multiplica a la integral lo pasamos dividiendo y nos queda

$\int e^x$ sen x dx = (- e^x cos x + e^x sen x) / 2

Finalmente factorizamos :

$\int e^x$ sen x dx = [½] e^x [sen x - cos x] +C