OPCIÓN A

1. Se considera el sistema de ecuaciones lineales con α∈R. Se pide:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+z=1} \\ \boldsymbol{\alpha x+2y+3z=1} \\ \boldsymbol{2y+z=1} \end{cases}$$

a) Discutir el sistema anterior en función del parámetro α.

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ \alpha & 2 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad M''=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & C2 & C3 & B \end{array} \\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ \alpha & 2 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

det M = 2 + 2α – 6 = - 4 + 2α
det M = 0 ----» - 4 + 2α = 0 ----» α = 2

1º Caso:

α ≠ 2 ; det M ≠ 0 por tanto el rango M = 3 = rango M'' , igual al número de incógnitas del sistema y por tanto se considera sistema compatible determinado.

2º Caso:

α = 2 ; rango M = 2

det(C2,C3,B) = $\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}$ = 2 + 2 – 6 – 2 = - 4 ≠ 0

rango M'' = 3
Por tanto rango M ≠ rango M'' considerando en este caso, que el sistema es incompatible.

b) Encontrar la solución del sistema cuando α = 3.

Aplicando el método de Gauss:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+z=1} \\ \boldsymbol{3x+2y+3z=1} \\ \boldsymbol{2y+z=1} \end{cases} \text{----» F2 - F3----»} \begin{cases} \boldsymbol{x+z=1} \\ \boldsymbol{3x+2z=0} \\ \boldsymbol{2y+z=1} \end{cases} \text{----»F2 - 2F1----»} \begin{cases} \boldsymbol{x+z=1} \\ \boldsymbol{x=-2} \\ \boldsymbol{2y+z=1} \end{cases}$$

por tanto

x = - 2 ; x + z = 1 ----» z = 1 – x = 1 + 2 = 3

z = 3 ----» 2y + z = 1 ----» y = (1 – z)/2 = (1 – 3)/2 = - 1

solución: x = -2 ; y = -1 ; z = 3

2. a) Hallar la ecuación del plano π que contiene a los puntos A = (1,0,1), B = (1,1,2) y C = (0,2,3).

$\overrightarrow{AX}$ = (x - 1,y, z - 1)
$\overrightarrow{AB}$ = (0,1,1)
$\overrightarrow{AC}$ = (-1,2,2)

$$\det(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

2(x – 1) – y + z – 1 – 2(x – 1) = 0
2x – 2 – y + z -1 – 2x + 2 = 0 ----» - y + z - 1 = 0

ecuación del plano π : - y + z - 1 = 0

b) Determinar la distancia del punto al plano π P = (0,1,0).

d(P, π) = $|Ax + By + Cz + D|/\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ = $|0 - 1 * 1 + 0 - 1|/\sqrt{0^2 + 3^2 + 3^2}$ = 2/(3$\sqrt{2}$)

3. Encontrar dos números positivos sabiendo que su producto es 100 y que la suma de los cuadrados de dichos números es mínima.

xy = 100 ----» y = 100/x

S = $x^2 + y^2$ ----» $x^2 + (\frac{100}{x^2})^2 = x^2 + 100x^{-2}$

S´ = 0 ----» 2x + 100^2(- 2x^{-3})

S´ = 0 ----» 2x - $\frac{2*100^2}{x^3}$ = 0

$2x^4 - 2 \times 100^2 = 0$
$x^4 = 100^2$ ----» x = 10 , y = 10

S'' (10) = 2 + $3x^{-4} \times 2 \times 100^2$ = 2 + $\frac{6*100^2}{x^4}$ = 8 ----» S'' > 0 mínimo

4. Hallar el valor de la integral definida.

$\int_0^{\pi} e^{3x}\, senx\, dx$

1ª Integral por partes

$$\int_a^b u \times dv = u \times v - \int_a^b v \times du$$

u = e^{3x} dv = senx dx
du = $3e^{3x}$ v = - cosx dx

$\int_0^{\pi} e^{3x}\, senx\, dx$ = - e^{3x} cosx - $\int_0^{\pi} 3e^{3x} cosx\ dx$

2ª Integral por partes

u = e^{3x} dv = cosx dx
du = $9e^{3x}$ v = senx dx

$\int_0^{\pi} e^{3x}\, senx\, dx$ = - e^{3x}cosx + $3e^{3x}senx$ - $\int_0^{\pi} 9e^{3x}\, senx\, dx$ = - e^{3x}cosx + $3e^{3x}senx - 9I$

10I = $e^{3x}(3senx$ – cosx) = $e^{3x}(3senx - cosx)$

I = ($e^{3x}(3senx - cosx)$)/10 = - 250

OPCIÓN B

1.Encontrar la matriz X = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sabiendo que se verifica la relación

$$\mathbf{AX = BX +} \boldsymbol{C^2}$$

siendo

A = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ **, B =** $\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **, C =** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

Teniendo en consideración $(A-B)^{-1}$(A – B) = I (matriz identidad)

AX – BX = C^2 ----» $(A-B)^{-1}$(A – B)X = $(A-B)^{-1}C^2$ ----» X = $(A-B)^{-1}C^2$

$C^2 = C \times C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$(A-B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(A-B)^{-1}(A-B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$2x = 1$	$z = 0$
$-2x + y = 0$	$t = 1$
$2z = 0$	$y = 1$
$-2z + t = 1$	$x = ½$

$(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$X = (A-B)^{-1}C^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

2. Se consideran los puntos A = (1,0,1), B = (0,1,1) y C = (1,1,α) con α∈R. Encontrar el valor de α para que el área del triángulo que forman los puntos A,B, y C sea ½.

$\overrightarrow{AB} = (-1,1,0)$
$\overrightarrow{AC} = (0,1,\alpha - 1)$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\alpha - 1)\,\vec{i} + (\alpha - 1)\,\vec{j} + \vec{k}$$

$\vec{w} = (\alpha - 1, -\alpha + 1, 1)$
$\vec{w} = \sqrt{(\alpha-1)^2 + (\alpha-1)^2 + 1^2}$

$A = (1/2) * \sqrt{(\alpha-1)^2 + (\alpha-1)^2 + 1^2} = ½$

$(\alpha-1)^2 + (\alpha-1)^2 + 1^2 = 1$; $\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$; por tanto α = 1

3.Calcular los límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ = 0/0 Indeterminación ; Múltiplico por el conjugado :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x*(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})*(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(1-x)-(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{-2x} = -\sqrt{2}/2$$

b) $\lim_{x\to \Pi/2} \frac{1-senx}{cosx}$

Consideramos las siguientes propiedades de los límites:

$\lim_{x\to \Pi/2} \frac{1-senx}{x} = 0$; $\lim_{x\to \Pi/2} \frac{cosx}{x} = 1$

$$\lim_{x\to \Pi/2} \frac{1-senx}{cosx} = \lim_{x\to \Pi/2} \frac{1-senx}{x} * \frac{x}{1} * \frac{1}{cosx} = \lim_{x\to \Pi/2} 0 * x * \frac{1}{cosx} = 0 * 1 = 0$$

4. Hallar el área encerrada por la gráfica de la función

f(x) = 1/x

y el eje entre las abscisas *x* = 1 y x = 2.

$\text{Área} = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2 - \ln 1$