MATEMATICAS CCSS MAYORES DE 25 AÑOS REY JUAN CARLOS 2014

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & a & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

a) Primero calculamos el determinante de la matriz

$$det|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & a \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 16 + 2a \rightarrow 16 + 2a = 0 \rightarrow a = -8$$

- Si a ≠ - 8 significa que el $det|A| \neq 0$; con lo que ran(A) = 3 = ran(A*) ⇒ S. Comp. Determinado
- Si a = - 8 significa que el $det|A| = 0$, con lo que ran(A) ≠ 3

$$det|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -8 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow det|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow \text{ran(A)} = 2$$

$$det|A^*| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \text{ran}(A^*) = 3$$

$$\text{ran(A)} = 2 \neq \text{ran}(A^*) = 3 \Rightarrow \text{S. Incompatible (Sin Solución)}$$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{I\,.\,(-2)+II} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{II+III\,.\,3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & 12 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 12z = 12 \Rightarrow z = 1 \\ 3y + 6z = 3 \Rightarrow y = -1 \\ 2x + y - z = 2 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

2. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$

a) Para calcular máximos y mínimos realizamos la primera derivada

$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \rightarrow x.(3x + 6) = 0 \rightarrow x = 0 \; y \; x = -2$

Así los candidatos son x = - 2 y x = 0 y observamos el signo de la derivada

	(-∞, - 2)	(-2, 0)	(0, ∞)
f´(x)	+	–	+
f(x)	creciente	decreciente	creciente

Para obtener el punto exacto sustituimos en f(x)

$f(-2) = 6 \rightarrow$ (-2, 6) máximo

$f(0) = 2 \rightarrow$ (0, 2) mínimo

b) Los puntos de inflexión los veremos en la segunda derivada:

$f''(x) = 6x + 6 = 0 \rightarrow x = -1$

	(-∞, - 1)	(-1, ∞)
f´´(x)	–	+
f (x)	∩	∪

Para obtener el punto exacto sustituimos en f(x)

$f(-1) = 4 \rightarrow$ (-1, 4) hay un punto de inflexión

3. P (ES) = 0´5

   P (Menor 30) = 0´6

   P (ES ∩ Menor 30) = 0´2

   a) P (ES U Menor) = P (ES) + P (Menor 30) - P (ES ∩ Menor 30) = 0´5 + 0´6 – 0´2 = 0´9 → 90 %

   b) $P\left({}^{ES}/_{Menor\ 30}\right) = \frac{P(ES \cap Menor\ 30)}{P(Menor\ 30)} = \frac{0'2}{0'6} = 0'3333 \rightarrow 33'33\ \%$

4. N (μ , 50) n = 81 $\bar{x} = 645$

   Calculamos $z_{\alpha/2}$ para 90 % de probabilidad

   $1 - 0'90 = 0'1 \Rightarrow 0'1 : 2 = 0'005 \Rightarrow 0'90 + 0'005 = 0'95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1'645$

   I.C. $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

   $\left(645 - 1'645 \cdot \frac{50}{\sqrt{81}}, 645 + 1'645 \cdot \frac{50}{\sqrt{81}}\right) \rightarrow (635'861\ ,\ 654'139)$

OPCIÓN B

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) $det|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 3 \rightarrow a - 3 = 0 \rightarrow a = 3$

- Si a ≠ 3 → ran (A) = 3
- Si a = 3 → ran (A) = 2

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{(Adj(A))^T}{|A|}$

Primero calculamos el determinante de la matriz:

$det|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

Calculamos la matriz de los adjuntos:

$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Traspuesta} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. a) $\lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{3x^2+4x-2}{x^2+1}\right)-1} = e^{\frac{\infty}{\infty}} = L'Hopital = \lim_{x\to\infty} e^{\left(\frac{6x+4}{2x}\right)-1} = e^{\frac{\infty}{\infty}} = L'Hopital =$
$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{6}{2}-1} = e^2$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-3x}\right) . \frac{(x+\sqrt{x^2-3x})}{(x+\sqrt{x^2-3x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x^2+3x}{x+\sqrt{x^2-3x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x+\sqrt{x^2-3x}} = \frac{\infty}{\infty} =$
$\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{2x} = \frac{\infty}{\infty} = L'Hopital = \frac{3}{2}$

c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4x-12}{x^2-2x} = \frac{0}{0} = L'Hopital = \lim_{x\to 2} \frac{2x+4}{2x-2} = 4$

3. $f(x) = 7x^2 + \ln(x^2) \qquad x_0 = 1$
Ecuación de la recta tangente:
$y = f(x_o) + f'(x_o).(x - x_0)$
$f'(x) = 14x + \frac{1}{x} . 2x = 14x + 2$
$f(1) = 7$
$f'(1) = 16$
$y = 7 + 16.(x-1) \to y = 7 + 16x - 16 \to y = 16x - 9$

4. N (96, 8)
a) $P(90 < x < 100) = P(x < 100) - P(x < 90) =$
$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{90-96}{8} = -0'75$
$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{100-96}{8} = 0'5$
$= P(z < 0'5) - P(z < -0'75) = P(z < 0'5) - \left(1 - P(z < 0'75)\right)$
$= 0'6915 - (1 - 0'7734) = 0'4649$

b) n = 100 N (96, 8) → N (96, 8/√100) → N (96, 0´8)
$P(x < 98) = P(z < 2'5) = 0'9938$
$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{98-96}{0'8} = 2'5$