MATEMATICAS CCSS MAYORES DE 25 AÑOS REY JUAN CARLOS 2013

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. $\left.\begin{array}{r} x-y+z=1 \\ 2x-4y+z=1 \\ x+y+z=a \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

a) Primero calculamos el determinante de la matriz

$$det|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Como el $det|A| \neq 0$ el ran(A) = 3 independientemente del valor de a$\Rightarrow$Sist. Comp. Determinado

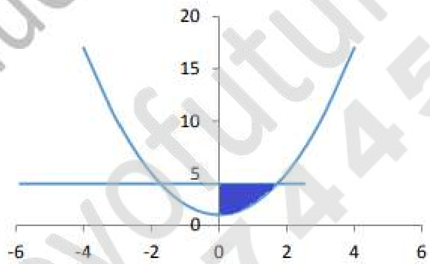
b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[I-III]{I.(-2)+II} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-III} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x-y+z=1 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \\ -2y-z=-1 \Rightarrow y=\frac{1}{2} \\ -z=0 \Rightarrow z=0 \end{cases}$$

2. $y \geq x^2+1$
$y \leq 4$
$x \geq 0$
$y = x^2+1$

x	y
0	1
2	5
-2	5



Puntos de corte con los ejes:

- Eje Y $\rightarrow x=0 \rightarrow y=1$

Por tanto corta en (0, 1)

- Eje X $\rightarrow y=0 \rightarrow x^2=-1$ Por tanto NO corta al eje X

3. $f(x) = ln(e^{-2x}-x)\ en\ x_0 = 0$

Ecuación de la recta tangente:

$y = f(x_o) + f'(x_o).(x-x_0)$

$$f'(x) = \frac{1}{e^{-2x}-x}.\ (-2.e^{-2x}-1) = \frac{-2.e^{-2x}-1}{e^{-2x}-x}$$

$f(0) = 0$

$f'(0) = -3$

$y = 0 + (-3).(x-0) \rightarrow y = -3x$

4. $P(F) = 0'6$

$P(M) = 0'3 \quad P(\overline{M}) = 0'7$

$P(F \cap M) = 0'25$

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3a \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Primero calculamos el determinante de la matriz:

$$det|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3a \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3a = 0$$

- Si a ≠ 0 → ran (A) = 3
- Si a = 0 → ran (A) = 2

$det|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

b) Si $a = \frac{1}{3} \to A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{(Adj(A))^T}{|A|}$

Primero calculamos el determinante de la matriz:

$$det|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

Calculamos la matriz de los adjuntos:

- $\begin{pmatrix} -1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Traspuesta} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \to$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & -2 & -4 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

2. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$

Para calcular máximos y mínimos realizamos la primera derivada

$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \to x.(3x + 6) = 0 \to x = 0 \; y \; x = -2$

Así los candidatos son x = - 2 y x = 0 y observamos el signo de la derivada

	(-∞, - 2)	(-2, 0)	(0, ∞)
f´ (x)	+	—	+
f (x)	creciente	decreciente	creciente

Para obtener el punto exacto sustituimos en f(x)

$f(-2) = 6 \to$ (-2, 6) máximo

$f(0) = 2 \to$ (0, 2) mínimo

3.

$$0'7\ V \rightarrow \begin{cases} 0'2\ E \\ 0'8\ NE \end{cases} \qquad 0'3\ M \rightarrow \begin{cases} 0'1\ E \\ 0'9\ NE \end{cases}$$

a) $P(E) = P(V \cap E) + P(M \cap E) = 0'7 \,.\, 0'2 + 0'3 \,.\, 0'1 = 0'17$

b) $P\left({}^{M}/_{E}\right) = \frac{P(M \cap E)}{P(E)} = \frac{0'3\,.\,0'1}{0'17} = 0'1765$

4. $N(\mu, 50) \qquad n = 64 \qquad \bar{x} = 245$

Calculamos $z\alpha_{/2}$ para 95 % de probabilidad

$1 - 0'95 = 0'05 \Rightarrow 0'05 : 2 = 0'025 \Rightarrow 0'95 + 0'025 = 0'975 \quad \Rightarrow \quad z\alpha_{/2} = 1'96$

$\text{I.C.} \equiv \left(\bar{x} - z\alpha_{/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z\alpha_{/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$\text{I.C.} \equiv \left(245 - 1'96 \,.\, \frac{50}{\sqrt{64}}, 245 + 1'96 \,.\, \frac{50}{\sqrt{64}}\right)$

$\text{I.C.} \equiv (232{,}75; 257{,}25)$