MATEMATICAS CCSS MAYORES DE 25 AÑOS REY JUAN CARLOS 2010

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

   a) Para poder restar matrices, éstas han de tener las mismas dimensiones, por tanto deberá tener 3 filas y 2 columnas (3 x 2)

   b) $(4A - X) \,.\, A^t = X \,.\, (X^t - A^t) \quad \to 4A.A^t - X.A^t = X.X^t - X.A^t$

   $\to 4A.A^t - X.A^t + X.A^t = X.X^t \quad \to \quad 4A.A^t = X.X^t$

   $$4.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 4.\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 16 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   c) Como $X.X^t = 4A.A^t$ *podemos deducir que* $\to \begin{cases} X = 2A \\ X^t = 2A^t \end{cases}$

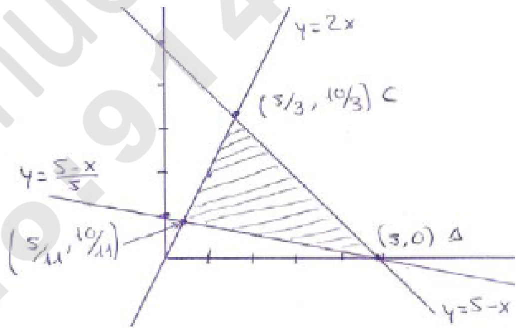
2. $\begin{cases} x + y \le 5 \\ x + 5y \ge 5 \\ y \le 2x \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$

x	y
0	5
5	0

x	y
0	1
5	0

x	y
0	0
1	2

a) Los vértices son:
A (5, 0)



B → Intersección entre:
$\begin{cases} y = \dfrac{5-x}{5} \\ y = 2x \end{cases} \to x = {}^{5}/_{11} \quad y = {}^{10}/_{11}$

C → Intersección entre:
$\begin{cases} y = 5 - x \\ y = 2x \end{cases} \to x = {}^{5}/_{3} \quad y = {}^{10}/_{3}$

b) $f(x) = y + 0'2x$

$f(5{,}0) = 0 + 0'2\,.\,5 = 1 \to Mínimo$

$f\left({}^{5}/_{11}, {}^{10}/_{11}\right) = {}^{10}/_{11} + 0'2\,.\,{}^{5}/_{11} = 1 \to Mínimo$

$f\left({}^{5}/_{3}, {}^{10}/_{3}\right) = {}^{10}/_{3} + 0'2\,.\,{}^{5}/_{3} = {}^{11}/_{3} \to Máximo$

Así encontramos un mínimo desde $x = {}^{5}/_{11}$ *hasta* $x = 5$

3. a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x = 1^\infty$

Aplicamos la fórmula: $e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x} - 1\right).\,x} = e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1-x}{1+x}\right).\,x} =$

$e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{1+x}} = e^{\frac{-\infty}{\infty}} = L\ddot{}Hopital = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{1}} = e^{-1}$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2^x-1}}{x}\right) = \frac{\infty}{\infty} = aplicamos\ L'Hopital = \lim_{x\to\infty}\frac{2^x\cdot\ln 2}{2\sqrt{2^x-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2^x\cdot\ln 2}{\sqrt{2^x}} = \infty$

4. a) $P(H \cap H \cap H) = \frac{10}{16} \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{8}{14} = \frac{3}{14}$

$P(M \cap M \cap M) = \frac{6}{16} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{1}{28}$

$P(Los\ dos\ sexos) = 1 - \frac{3}{14} - \frac{1}{28} = \frac{3}{4} = 0'75$

b) $P\left({M\ en\ 2^{\underline{o}}\ lugar}/{2\ Hombres} \right) = \frac{P(H \cap M \cap H)}{P(H \cap H \cap M) + P(H \cap M \cap H) + P(M \cap H \cap H)} =$

$$\frac{\frac{10}{16} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{9}{14}}{\frac{10}{16} \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{6}{14} + \frac{10}{16} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{9}{14} + \frac{6}{16} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14}} = \frac{1}{3}$$

OPCIÓN B

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A^{-1})^2 = (A^2)^{-1}$

$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^T}{|A|}$

Primero calculamos el determinante de la matriz:

$det|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2$

Calculamos la matriz de los adjuntos:

$\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Traspuesta} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$(A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & -3/4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$(A^2)^{-1} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$

Primero calculamos el determinante de la matriz:

$det|A| = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 12 & 5 \end{vmatrix} = 4$

Calculamos la matriz de los adjuntos:

$\begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{Traspuesta} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -12 & 8 \end{pmatrix} \quad (A^2)^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & -3/4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Por tanto son iguales

2. a) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x-2}{1+x} \right)^x = \left(\frac{2-2}{1+2} \right)^2 = 0$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}-x} \cdot \frac{(\sqrt{x^2-1}+x)}{(\sqrt{x^2-1}+x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2-1}+x)}{x^2-1-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2-1}+x)}{-1}$

$$= \lim_{x\to\infty} -\left(\sqrt{x^2-1}+x\right) = -\infty$$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty} = L\ddot{}Hopital = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1/2\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{\infty}{\infty} = L\ddot{}Hopital = \lim_{x\to\infty} \frac{2/2\sqrt{x}}{1}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

3. $f(x) = ax^2 + bx + c$ $\qquad f'(x) = 2ax + b$

$f(0) = -1$

$f'(0) = -3$

$f'(1) = 1$

$f(0) = a.0^2 + b.0 + c = -1 \quad \to \quad c = -1$

$f'(0) = 2a.0 + b = -3 \quad \to \quad b = -3$

$f'(1)=2\cdot a\cdot 1+b=-1$; $2a-3=-1$; $a=2$ $f(x)=2x^2-3x-1$