AÑO 2014 - OPCIÓN A

Ejercicio 1

Apartado a)

$$\left.\begin{array}{r} x+y+mz=6 \\ -x+2y=3 \\ mx+4y+2z=15 \end{array}\right\} \quad (A)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ -1 & 2 & 0 \\ m & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad (A')=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 6 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ m & 4 & 2 & 15 \end{array}\right)$$

Calculamos el det(A) e igualamos a cero para sacar los valores en los que el determinante se anula y por tanto ran(A)<3

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ -1 & 2 & 0 \\ m & 4 & 2 \end{vmatrix}=-2m^2-4m+6=0$$

$$m=\frac{4\pm\sqrt{16+48}}{-4}=\frac{4\pm 8}{-4}\longrightarrow \begin{array}{l} m=-3 \\ m=1 \end{array}$$

- **Si m=-3,** ran(A)<3

  Cogemos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3\neq 0\rightarrow ran(A)=2$

  Calculamos ahora el rango de A'

  $$|A'|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 15 \end{vmatrix}=36\neq 0\rightarrow ran(A')=3$$

  ran(A)≠ran(A'), se trata de un **sistema incompatible**

- **Si m=1,** ran(A)<3

  Con el mismo menor que en el caso anterior sabemos que ran(A)=2 Calculamos el rango de A'

  $$|A'|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 15 \end{vmatrix}=0\rightarrow ran(A')<3$$

  Usando el mismo menor sabemos también que ran(A')=2

  Por tanto, ran(A)=ran(A')=2<nº incógnitas, se trata de un **sistema compatible indeterminado.**

- **Si m≠-3 y m≠1,** ran(A)=ran(A')=3=nº de incógnitas, en este caso tenemos un **sistema compatible determinado.**

Apartado b)

Resolvemos el sistema para m=0

$$\left.\begin{array}{r} x+y=6 \\ -x+2y=3 \\ 4y+2z=15 \end{array}\right\} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

Para resolver este sistema vamos a utilizar el método de los determinantes. Para calcular la incógnita x del sistema de ecuaciones lineales, se sustituye la columna x de la matriz de coeficientes por los términos independientes, se obtiene el determinante de la matriz resultante y se divide este valor por el del determinante de la matriz de los coeficientes.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 15 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 15 & 2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 15 \end{vmatrix}}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Soluciones del sistema: $\boldsymbol{x = 3; y = 3; z = \frac{3}{2}}$

Ejercicio 2

$$f(x) = -\frac{25}{4}x^2 + 500x, \qquad 0 \leq x \leq 80$$

Apartado a)

El cohete dejara de desprender luz cuando f(x)=0

$$f(x) = -\frac{25}{4}x^2 + 500x = 0 \rightarrow \left(-\frac{25}{4}x \quad + 500\right) = 0 \rightarrow x_1 = 0$$

Esta solución no es válida porque en el instante 0 segundos el cohete aún no se ha encendido.

Calculamos la segunda solución $-\frac{25}{4}x + 500 = 0 \rightarrow x_2 = \boldsymbol{80\ segundos}$

Esta es la solución correcta

Apartado b)

Para hallar el máximo hacemos f'(x)=0

$$f'(x) = -\frac{50}{4}x - 500 = 0 \rightarrow \boldsymbol{x = 40\ segundos}$$

Comprobamos que es un máximo con la f''(x)

$$f''(x) = -\frac{50}{4} \leq 0, por\ lo\ tanto\ la\ solución\ anterior\ es\ un\ máximo$$

Apartado c)

Si damos valores a f'(x) en el intervalo 40≤x≤80, obtenemos que f'(x)<0 y, por tanto, decreciente, por lo que no sería correcto afirmar en para x=60 la intensidad de luz emitida está aumentando. Lo correcto es decir que la intensidad de luz emitida está disminuyendo

Ejercicio 3

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Apartado a)

Igualando $P(A \cap B)$ y despejando $P(A)$:

$$P(A) = \frac{P(A|B)}{P(B|A)} \cdot P(B) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Apartado b)

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \big(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\big) =$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\right) = 1 - \left(\frac{4}{12} + \frac{6}{12} - \frac{1}{12}\right) = 1 - \frac{9}{12} = \frac{1}{4}$$

Ejercicio 4

Apartado a)

$$\bar{x} = \frac{290 + 275 + 290 + 325 + 285 + 365 + 375 + 310 + 290 + 300}{10} = 310{,}5$$

La distribución de la media muestral se distribuye según $N\left(310{,}5\,; \frac{34{,}5}{\sqrt{10}}\right)$.

Para el 95% de confianza: $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}9750$

De la tabla de distribución normal N(0,1), se obtiene: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

Por tanto el intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(310{,}5 - 1{,}96 \cdot \frac{34{,}5}{\sqrt{10}}, 310{,}5 + 1{,}96 \cdot \frac{34{,}5}{\sqrt{10}}\right) =$$
$$= (289{,}12\,, 331{,}88)$$

Apartado b)

$$E = Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{34{,}5}{\sqrt{n}} = 10 \Leftrightarrow n = (1{,}96)^2 \frac{34{,}5^2}{10^2} = 45{,}72$$

El tamaño de la muestra debería de ser igual a 42.

AÑO 2014 - OPCIÓN B

Ejercicio 1

Apartado a)

Para saber si una matriz tiene inversa calculamos su determinante, si este es distinto de cero existe su inversa.

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ = 16 ≠0, existe la inversa

Para hallar la inversa construimos una matriz tal que M=A|I, siento I la matriz identidad de orden 3x3.

Utilizamos el Método de Gauss para transformar la matriz izquierda en la matriz identidad que ahora está a la derecha; y la matriz que resulte a la derecha será la inversa de A, A^{-1}.

M = $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F1 \\ F2 \\ F3-F1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F1-F2 \\ F2 \\ F3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{\substack{F1 \\ F2 \\ F3+F2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{1/2F1 \\ 1/2F2 \\ 1/4F3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array}\right)$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

Apartado b)

Despejamos la matriz X, sabemos que $A^{-1} \cdot A = I$

$$\frac{1}{4}A^2 - AX = B \rightarrow \frac{1}{4}A^2 - B = AX \rightarrow A^{-1}\left(\frac{1}{4}A^2 - B\right) = A^{-1}AX$$

$$A^{-1}\left(\frac{1}{4}A^2 - B\right) = X$$

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 12 & 4 & 16 \end{pmatrix}$; $\quad \frac{1}{4}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{4}A^2 - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \\ -11 & 3 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 14 & -2 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\left(\frac{1}{4}A^2 - B\right) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 14 & -2 & 12 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$$

Apartado a)

La función está definida para todos los números reales, por lo que no existen asíntotas verticales.

Vamos a calcular sus asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$

Y=1

Asíntota oblicua no tiene por tener horizontal.

A continuación determinamos sus extremos relativos, para ello calculamos f'(x) e igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+1) - (x+1)^2(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 0 \to \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{matrix}$$

Comprobamos cómo se comporta la función a lo largo de la recta real, y así determinamos si son máximos o mínimos. También se puede hacer sustituyendo estos valores en la segunda derivada.

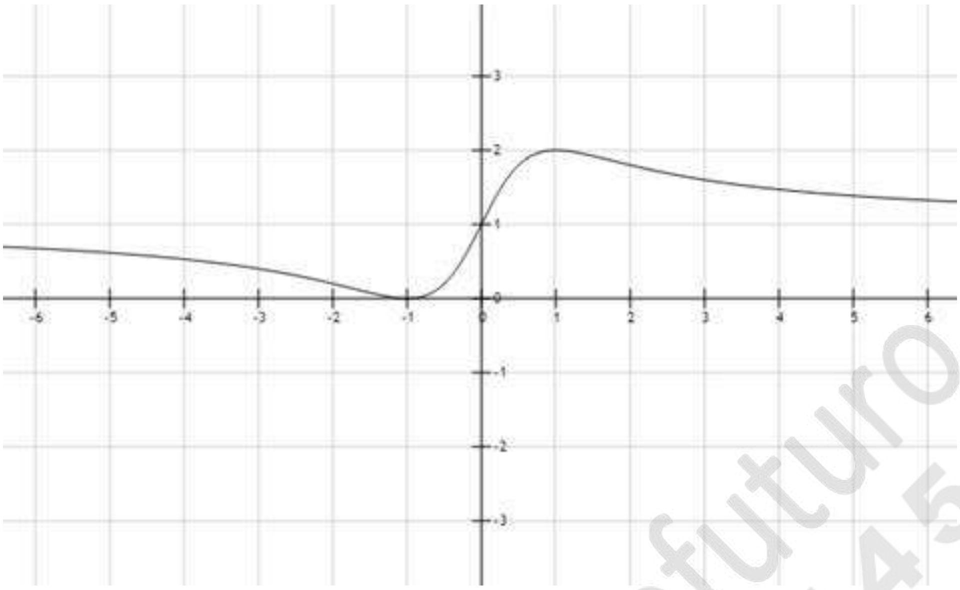
Dando valores a f'(x) tenemos:

Es mínimo en (-1,0)

Es máximo en (1,2)

Los valores de y los sacamos sustituyendo x_1 y x_2 en f(x).

Apartado b)



Apartado c)

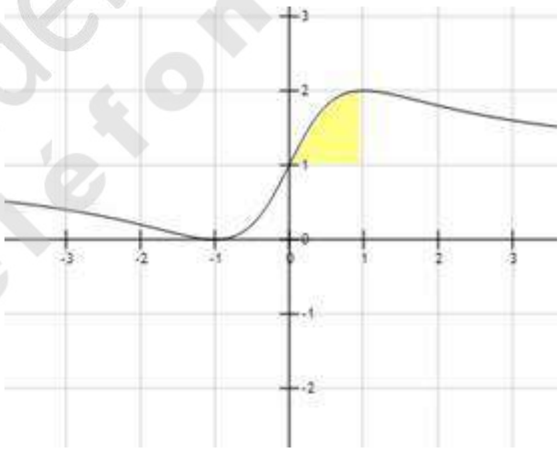
Cuando y=1, x=0, tenemos el recinto [0,1]

La función a integrar es el área encerrada por f(x)= $\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ e y=1.

$$\int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} - 1\,dx = \int_0^1 \frac{(x+1)^2 - x^2 - 1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2+2x+1-x^2-1}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \ln(x^2+1)\Big]_0^1 = ln2 - ln1 = ln2\ \boldsymbol{u^2}$$



Ejercicio 3

Apartado a)

Del enunciado se conoce:

- $N = 20$ alumnos.
- Frecuencias relativas acumuladas (H_i)
- Amplitud de los intervalos variable (Ai)
- $L_{i1} = 70$

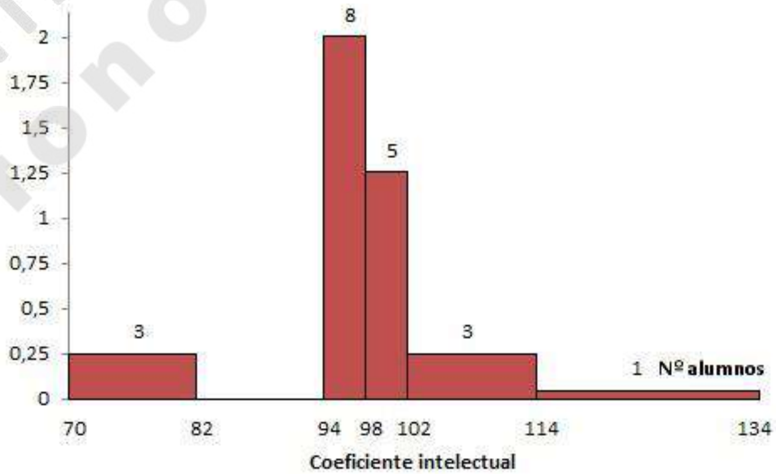
Se construye la tabla de distribución de frecuencias: $H_i \to F_i$ y $h_i \to f_i$

Ai	L_i	$L_s = L_i + Ai$	$f_i = h_i \cdot N$	$F_i = H_i \cdot N$	$hi = Hi - Hi_{-1}$	H_i
12	*70*	82	3	3	0,15	*0,15*
12	82	94	0	3	0	*0,15*
4	94	98	8	11	0,4	*0,55*
4	98	102	5	16	0,25	*0,8*
12	102	114	3	19	0,15	*0,95*
20	114	134	1	20	0,05	*1*
			N=20			

Apartado b)

Al presentar intervalos de amplitud diferente se tiene que calcular la altura de cada rectángulo del histograma.

$L_i - L_s$	f_i	Base (Ai)	Altura $\left(\frac{f_i}{Ai}\right)$
70-82	3	12	0,25
82-94	0	12	0
94-98	8	4	2
98-102	5	4	1,25
102-114	3	12	0,25
114-134	1	20	0,05



La clase modal es la que presenta mayor altura, por tanto el intervalo modal corresponde a [94, 98).

Apartado c)

La mitad de los datos es $\frac{20}{2} = 10$. La primera frecuencia acumulada (F_i) mayor que 10 le corresponde al intervalo 94-98. Por tanto, la clase mediana es [94, 98) y la mediana de coeficiente intelectual es:

$$M = L_i + \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a_i = 94 + \frac{10-3}{8} \cdot 4 = 97{,}5$$

Ejercicio 4

R: "robo en una vivienda" A: "se activa la alarma"

$PR = 0{,}05$

$PA/R = 0{,}98$

$PA^c/R = 0{,}02$

$PR^c = 0{,}95$

$PA/R^c = 0{,}01$

$PA^c/R^c = 0{,}99$

Apartado a)

$$P(R/A) = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}98}{0{,}05 \cdot 0{,}98 + 0{,}95 \cdot 0{,}01} = 0{,}84$$

Apartado b)

$$P(R \cap A^c) = 0{,}05 \cdot 0{,}02 = 0{,}001$$