AÑO 2013- OPCIÓN A

Ejercicio 1

Apartado a)

$$\left.\begin{array}{r} mx+2y+z=-2 \\ -x+my=1 \\ -6y-z=-1 \end{array}\right\} \quad (A)=\begin{pmatrix} m & 2 & 1 \\ -1 & m & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{pmatrix} \quad (A')=\left(\begin{array}{ccc|c} m & 2 & 1 & -2 \\ -1 & m & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Calculamos el det(A) e igualamos a cero para sacar los valores en los que el determinante se anula y por tanto ran(A)<3

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ -1 & m & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{vmatrix}=-m^2+4 \longrightarrow \begin{array}{c} m=2 \\ m=-2 \end{array}$$

- **Si m=-2**, ran(A)<3

  Cogemos el menor $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=6\neq 0 \to ran(A)=2$

  Calculamos ahora el rango de A'

  $$|A'|=\begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 \end{vmatrix}\neq 0 \to ran(A')=3$$

  ran(A)≠ran(A'), se trata de un **sistema incompatible**

- **Si m=2,** ran(A)<3

  $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\neq 0$ RA=2

  Calculamos el rango de A'

  $$|A'|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 \end{vmatrix}\neq 0 \to ran(A')=3$$

  ran(A)≠ran(A'), se trata de un **sistema incompatible**

- **Si m≠-2 y m≠2**, ran(A)=ran(A')=3=nº de incógnitas, en este caso tenemos un **sistema compatible determinado.**

Apartado b)

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=-2 \\ -x+y=1 \\ -6y-z=-1 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$X=\frac{\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -6 & -1 \end{vmatrix}}{3}. =\frac{2-6+1+2}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$Y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{3}. =\frac{-1+1+2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$Z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -1 \end{vmatrix}}{3}. =\frac{-1-12-2+6}{3}=-3$$

Ejercicio 2

$$P(x) = (x+1)^2(32-x)$$

Apartado a)

Buscamos los puntos en los que la derivada es igual a cero

$$P'(x) = (2x+2)(32-x) + (x+1)^2(-1) = -3x^2+60x+63 = 0$$

$$x = \frac{-60 \pm \sqrt{3600+756}}{-6} = \frac{-60 \pm 66}{-6} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} x=-1 \\ x=21 \end{array}$$

Para saber cuál es el máximo utilizamos la segunda derivada

$$P''(x) = -6x+60 \quad \rightarrow \; \begin{array}{l} P''(-1) > 0 \rightarrow mínimo \\ P''(21) < 0 \rightarrow máximo \end{array}$$

Por lo tanto, **la temperatura a mantener para obtener la producción máxima de tomates es 21ºC**

Apartado b)

$$Para\ x = 21ºC \rightarrow P(21) = (21+1)^2(32-21) = \mathbf{5324\ kilogramos}$$

Ejercicio 3

Apartado a)

$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0,65 = 0,35$

Apartado b)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = 0,55 + 0,35 - 0,65 = 0,25$

Apartado c)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,25}{0,35} = \frac{5}{7}$$

Apartado d)

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\bar{A})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)} = \frac{1 - 0,65}{1 - 0,55} = \frac{0,35}{0,45} = \frac{7}{9}$$

Ejercicio 4

Según el enunciado, la variable aleatoria X: "días de permanencia en hospital", se distribuye como una normal de media $\mu = 8$ y desviación típica $\sigma = 10$, $N\,(8, 10)$.

Las muestras de tamaño n obtenidas en una población $N(\mu, \sigma)$, se distribuyen según una normal de media $\bar{X} = \mu$ y desviación típica $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, que se tipifica a una distribución $N(0, 1)$, cuyos valores están tabulados, mediante el cambio:

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Apartado a)

Para $n = 800$, la distribución de la media muestral se distribuye según $N\left(8, \frac{10}{\sqrt{800}}\right)$. Por tanto:

$$P(\bar{X} < 9) = P\left(Z < \frac{9-8}{\frac{10}{\sqrt{800}}}\right) = P(Z < 2,83) = 0,9977$$

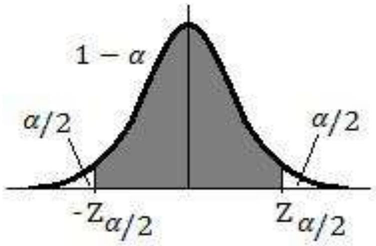
Apartado b)

Sabemos que el error admitido viene dado por $E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor crítico correspondiente para un nivel de confianza $1-\alpha$ ó nivel de significación α (el valor de la abscisa que deja a su derecha un área igual a α/2).

De la expresión se deduce:

$$n = \left(Z_{\alpha/2}\right)^2 \frac{\sigma^2}{E^2}$$

En este caso, para $E < 1$día con un nivel de confianza del 95%:



$$1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$$

En la tabla de la distribución normal se busca $Z_{\alpha/2}$, tal que:

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}9750 \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$$

$$n \geq \left(Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \frac{\sigma^2}{E^2} = 1{,}96^2 \cdot 10^2 = 384{,}16$$

Esto es un tamaño mínimo de la muestra de 385.

AÑO 2013- OPCIÓN B

Ejercicio 1

Representación gráfica

$$\begin{cases} x + 2y \geq 4 \\ 3x - 2y \leq 12 \\ 6x - y \geq -2 \\ y \leq 8 \end{cases}$$

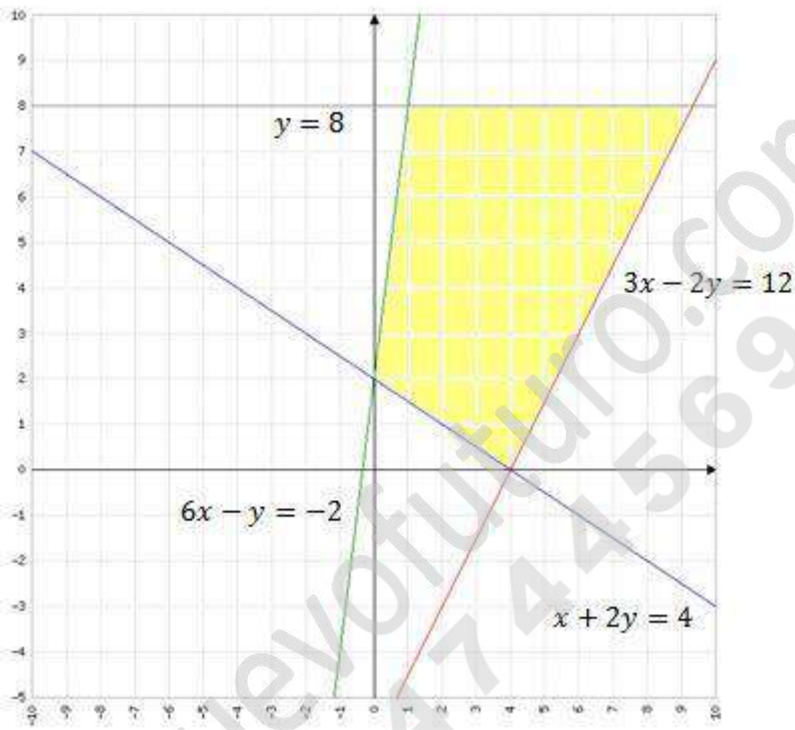
Representamos las rectas y vemos en que puntos se cortan:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 6x - y = -2 \end{cases} \rightarrow A(0,2)$$

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases} \rightarrow B(4,0)$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ y = 8 \end{cases} \rightarrow C(\frac{28}{3},8)$$

$$\begin{cases} y = 8 \\ 6x - y = -2 \end{cases} \rightarrow D(1,8)$$



Máximo y mínimos de f(x,y)=-1,2x+2y en la región dada:

Calculamos los valores que toma f(x,y) en los puntos de corte A, B, C y D

$$F(A) = 4;\ F(B) = -4{,}8;\ F(C) = 4{,}8;\ \ F(D) = 14{,}8$$

La función de f(x,y)=-1,2x+2y es máxima en el punto D y mínima en el punto B.

Ejercicio 2

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$$

Apartado a)

- Cortes con el eje y $\rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow Punto\ (0{,}0)$
- Cortes con el eje x $\rightarrow y = 0 \rightarrow x^3 - 4x^2 + 4x = 0$

$$x(x^2 - 4x + 4) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \rightarrow Punto\ (0{,}0)$$

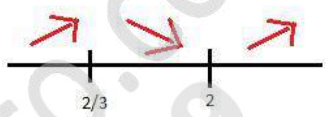
$$x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} \rightarrow x_2 = 2 \rightarrow Punto\ (2{,}0)$$

Los puntos de corte con los ejes son (0,0) y (2,0)

Apartado b)

Máximos y mínimos relativos: buscamos los puntos en los que la derivada es cero.

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6} \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{2}{3} \end{array}$$



Damos valores a f'(x) y vemos cómo se comporta en los intervalos, antes de 2/3 es creciente, entre 2/3 y 2 es decreciente y a partir de 2 es creciente. Se puede deducir que x=2 es un mínimo y x=2/3 es un máximo.

$$Máximo\ (\frac{2}{3}, \frac{32}{27})$$

$$Mínimo\ (2{,}0)$$

Los valores de y se calculan sustituyendo x en la función f(x).

Apartado c)

Recta tangente a f en x=1

Sustituimos x=1 en f y obtenemos que y=1, ya tenemos un punto de la recta tangente.

Calculamos la pendiente de la recta tangente, que es la derivada de la función f en x=1.

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$$

$$f'(1) = 3 - 8 + 4 = -1$$

Con estos datos construimos la ecuación de la recta tangente:

$$y = 1 - 1(x - 1)$$

Operando obtenemos: $y = 2 - x$, **ecuación de la recta tangente**

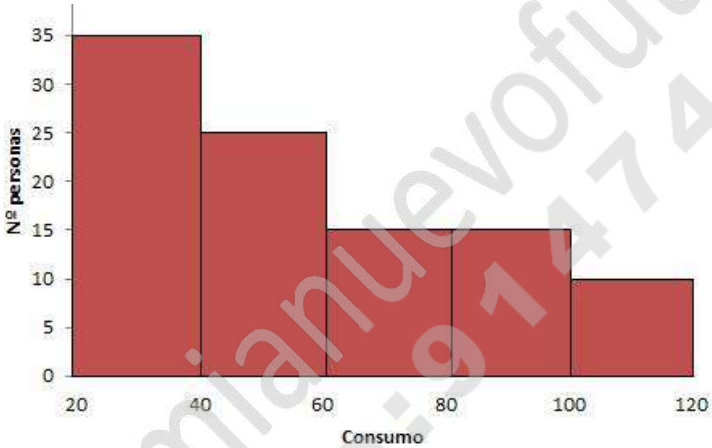
<u>Ejercicio 3</u>

Se forma la tabla:

$L_i - L_s$	x_i	f_i	F_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
20-40	30	35	35	1.050	31.500
40-60	50	25	60	1.250	62.500
60-80	70	15	75	1.050	73.500
80-100	90	15	90	1.350	121.500
100-120	110	10	100	1.100	121.000
		$N = 100$		5.800	410.000

Apartado a)

Histograma de frecuencias absolutas (f_i):



Apartado b)

El consumo medio es:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{N} = \frac{5.800}{100} = 58\ kg$$

La mitad de los datos es $\frac{100}{2} = 50$. La primera frecuencia acumulada (F_i) mayor que 50 le corresponde a la clase (40, 60]. Por tanto, la clase mediana es (40, 60] y la mediana:

$$M = L_i + \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a_i = 40 + \frac{50 - 35}{25} \cdot 20 = 52kg$$

Apartado c)

Del intervalo [20,40] hay que restar a las personas que consuman entre 20 y 35. Suponemos que los datos se distribuyen de forma uniforme. La frecuencia correspondiente al intervalo (35,40] se estima en: $35 \cdot \frac{(40-35)}{(40-20)} = 8{,}75$

Análogamente, únicamente interesa la frecuencia del intervalo (80,81): $15 \cdot \frac{(81-80)}{(100-80)} = 0{,}75$

El número de personas que consumen entre 35 y 81 kg son: $8{,}75 + 25 + 15 + 0{,}75 = 49{,}5$

$$\frac{49{,}5}{100} = 0{,}495 \Rightarrow \text{El } 49{,}5\% \text{ de las personas}$$

Ejercicio 4

$$P(X=2) = \binom{3}{2} \cdot \frac{20 \cdot 19 \cdot 4}{24 \cdot 23 \cdot 22} = \frac{3!}{2!\,1!} \cdot \frac{1520}{12144} = 3 \cdot \frac{1520}{12144} = 0{,}3755$$

$$P(X=0) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{24 \cdot 23 \cdot 22} = \frac{24}{12144} = 0{,}002$$