AÑO 2011- OPCIÓN A

Ejercicio 1

Apartado a)

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+z=0 \\ -2x+y+4z=-2 \\ 5x+y+mz=1 \end{array}\right\} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & m \end{pmatrix} \quad A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & m & 1 \end{array}\right)$$

Calculamos det(A) y vemos para que valores el det(A) = 0

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & m \end{vmatrix}=m-2+60-5-4+6m \rightarrow m=-7$$

- **Si m=-7**, det(A)=0 y ran(A)<3

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & -7 \end{pmatrix}, cogemos\ el\ menor\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=7\neq 0 \rightarrow ran(A)=2$$

Calculamos el det(A') $|A'|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-21\neq 0 \rightarrow ran(A')=3$

ran(A)≠ran(A'), se trata de un **sistema incompatible**

- **Si m≠-7,** ran(A) = ran(A') = nº de incógnitas, entonces se trata de un **sistema compatible determinado**

Apartado b)

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+z=0 \\ -2x+y+4z=0 \\ 5x+y-7z=0 \end{array}\right\} \xrightarrow[\substack{ecuación\ dependiente \\ de\ las\ otras}]{\substack{Calculamos\ el\ \det(A) \\ para\ ver\ si\ hay\ alguna}} |A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & -7 \end{vmatrix}=0$$

Seleccionamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=7\neq 0 \rightarrow ran(A)=2$, podemos suprimir la 3ª fila porque es combinación lineal de la 1ª y la 2ª.

Para resolver eliminamos esta fila y pasamos la z al segundo miembro.

$$\left.\begin{array}{r} x+3y=-z \\ -2x+y=-4z \end{array}\right\} \xrightarrow{*2} \left.\begin{array}{r} 2x+6y=-2z \\ -2x+y=-4z \end{array}\right\} \; 7y=-6z \rightarrow y=\frac{-6}{7}z$$

$$\left.\begin{array}{r} x+3y=-z \\ -2x+y=-4z \end{array}\right\} \xrightarrow[*(-3)]{} \left.\begin{array}{r} x+3y=-z \\ 6x-3y=12z \end{array}\right\} \; 7x=11z \rightarrow x=\frac{11}{7}z$$

$$Si\ \boldsymbol{z=\lambda}\,;\ \boldsymbol{y=\frac{-6}{7}\lambda}\,;\boldsymbol{x=\frac{11}{7}\lambda}$$

Ejercicio 2

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{2x}{x-3}}$$

Apartado a)

$$f'(x)=\frac{2(x-3)-2x}{(x-3)^2}=\frac{2x-6-2x}{(x-3)^3}=\frac{-6}{(x-3)^2}=\frac{-6}{x^2-6x+9}$$

Apartado b)

Cuando x=2, y=f(2)=-4, punto (2,-4)

Calculamos la pendiente de la recta, que es la derivada de la función en x=2 (punto de tangencia)

$$f'(2)=\frac{-6}{4-12+9}=\frac{-6}{1}=-6$$

Ecuación de la recta tangente

$$y=-4-6(x-2)\rightarrow \boldsymbol{y=-6x+8}$$

Apartado c)

$$f'(x>3)<0$$

La derivada de f(x) es menor que cero para x>3, por lo tanto es decreciente. Esto significa que cuando x>3, a medida que aumenta el valor de x (x_1>x_2>3) el valor de f(x) disminuye (f(x_2)>f(x_1)>0. Además f(x) es siempre positivo porque el numerador sólo es negativo para números negativos y el denominador sólo es negativo para valores menores que tres. En consecuencia, en este caso ambos serán siempre positivos y, por supuesto, su cociente.

Verdadero.

Ejercicio 3

La variable del enunciado X:"niños con sobrepeso", sigue una distribución binomial con $n=8$ y $p=0{,}3$, $B(8;\,0{,}3)$.

Apartado a)

De la tabla de distribución binomial se tiene:

$\mathrm{P(X = 0\ ) = 0{,}0576}$

$p(X = 1)\ = 0{,}1977$

$p(X = 2)\ = 0{,}2965$

$p(X = 3)\ = 0{,}2541$

$p(X = 4)\ = 0{,}1361$

$\mathrm{P(X = 5\ ) = 0{,}0467}$

$\mathrm{P(X = 6\ ) = 0{,}01}$

$\mathrm{P(X = 7\ ) = 0{,}012}$

$\mathrm{P(X = 8\ ) = 0{,}001}$

El número de niños con sobrepeso más probable es 2 niños.

Apartado b)

$E = n \cdot p = 8 \cdot 0{,}3 = 2{,}4 \rightarrow$ 2 niños

Apartado c)

Utilizando los valores de la tabla:

$p(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 1) = 1 - 0{,}2553 = 0{,}7447$

Ejercicio 4

Suceso A="sacar un as de una baraja":

$P(A) = \frac{4}{40}$

Apartado a)

Sucesos dependientes:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$$

Apartado b)

Sucesos independientes:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{100}$$

AÑO 2011- OPCIÓN B

Ejercicio 1

Apartado a)

C = A·B = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 7 \\ 0 & 6 & -14 \end{pmatrix}$

Apartado b)

La matriz cuadrada de orden 2 que verifica $D*A=I_{2x2}$, es A^{-1}. Vamos a comprobar si A tiene inversa. Para saber si una matriz tiene inversa su determinante tiene que ser distinto de cero.

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$, al ser det(A) = 0 no existe inversa y, por tanto, **no hay una matriz D que verifique $D*A=I_{2x2}$**

Ejercicio 2

Apartado a)

$$x^3 - x^2 - x - 2 = 0$$

Sabemos que x=2 es una solución, aplicamos la Regla de Ruffini para obtener las demás soluciones.

	1	-1	-1	-2
2		2	2	2
	1	1	1	0

A continuación probamos si existen más soluciones a partir de la ecuación de segundo grado que tenemos ahora.

$$x^2+x+1=0 \rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

No existen más soluciones reales para esta ecuación.

Apartado b)

Calculamos la primera derivada de la función y vemos en que puntos se hace cero, f'(x)=0, así obtenemos los puntos singulares.

$$f'(x)=3x^2-2x-1=0 \rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{6}=\frac{2\pm 4}{6} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} \boldsymbol{x_1=1} \\ \boldsymbol{x_2=\frac{-1}{3}} \end{matrix}$$

Para saber si son máximos o mínimos hacemos la segunda derivada y sustituimos los valores calculados.

$$f''(x)=6x-2 \rightarrow \begin{matrix} f''(1)>0 \rightarrow MÍNIMO \\ f''\left(\frac{-1}{3}\right)<0 \rightarrow MÁXIMO \end{matrix}$$

- x_1=1, y=-3, por tanto **(1,-3) es un máximo**
- x_2=-1/3, y=-49/27, por tanto **(-1/3,- 49/27) es un mínimo**

Apartado c)

Cuando x=1, y=-3, con esto ya tenemos un punto de la recta tangente (1,-3)

Para obtener la pendiente de la recta calculamos la derivada de la función y damos el valor x=1

$$f'(x)=3x^2-2x-1 \rightarrow f'(1)=3-2-1=0$$

La pendiente es cero, por tanto, **es una tangente horizontal cuya ecuación es Y=-3.**

Ejercicio 3

x_i	y_i	x_i2	y_i2	x_iy_i
40	3	1.600	9	120
70	7	4.900	49	490
100	9	10.000	81	900
130	16	16.900	256	2.080

160	17	25.600	289	2.720
190	28	36.100	784	5.320
$\sum x = 690$	$\sum y = 80$	$\sum x^2 = 95.100$	$\sum y^2 = 1.468$	$\sum xy = 11.630$

$$\bar{x} = \frac{690}{6} = 115 \qquad \sigma_x^2 = \frac{95.100}{6} - 115^2 = 2625 \qquad \sigma_x = 51,23$$

$$\bar{y} = \frac{80}{6} = 13,33 \qquad \sigma_y^2 = \frac{1.468}{6} - 13,33^2 = 66,89 \qquad \sigma_y = 8,18$$

$$\sigma_{xy} = \frac{11.630}{6} - 115 \cdot 13,33 = 405$$

Apartado a)

$$y = \bar{y} + m_{yx}(x - \bar{x})$$

$$m_{yx} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{405}{2625} = 0,15 \ \rightarrow \ y = 13,33 + 0,15(x - 115)$$

$$y = 0,15x - 3,92$$

Apartado b)

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{405}{51,23 \cdot 8,18} = 0,97$$

Ejercicio 4

$$\begin{cases} 40\% \ trasporte \ público \begin{cases} 80\% \ comedor \\ 20\% \ no \ comedor \end{cases} \\ 60\% \ no \ transporte \ público \begin{cases} 50\% \ comedor \\ 50\% \ no \ comedor \end{cases} \end{cases}$$

T: “utiliza el transporte público” C: “utiliza el comedor de la empresa”

Apartado a)

$$P(C) = 0,4 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,5 = 0,62$$

⇒ 62% de los trabajadores come en el comedor

Apartado b)

$$P(T/C) = \frac{0,4 \cdot 0,8}{0,4 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,5} = 0,52$$

⇒ 52% de los trabajadores que come en el comedor va en transporte público