AÑO 2010- OPCIÓN A

Ejercicio 1

Apartado a)

$$\left.\begin{matrix} 2x-3y=-2 \\ kx+6y=9 \end{matrix}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ k & 6 \end{pmatrix} \qquad A' = \left(\begin{matrix} 2 & -3 \\ k & 6 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} -2 \\ 9 \end{matrix}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ k & 6 \end{vmatrix}$$

12+3k=0

K=-4

- **Si k=-4** , ran(A) = 1

$$|A'| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$, ran(A') = 2

Como ran(A) ≠ ran(A') es un **sistema incompatible**

- **Si k≠-4**, ran(A) = ran(A') = nº de incognitas es un **sistema compatible determinado**

- Resolvemos para k=1

$$\left.\begin{matrix} 2x-3y=-2 \\ x+6y=9 \end{matrix}\right\} \xrightarrow[*(-2)]{} \left.\begin{matrix} 2x-3y=-2 \\ -2x-12y=-18 \end{matrix}\right\} -15y=-20 \rightarrow \boldsymbol{y=\frac{4}{3}}$$

$$\left.\begin{matrix} 2x-3y=-2 \\ x+6y=9 \end{matrix}\right\} \overset{*2}{\rightarrow} \left.\begin{matrix} 4x-6y=-4 \\ x+6y=9 \end{matrix}\right\} 5x=5 \rightarrow \boldsymbol{x=1}$$

Apartado b)

$$\left.\begin{matrix} x-y=2 \\ x^2-y^2=36 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{despejamos\ x} x=2+y \xrightarrow[2^a ecuación]{sustituimos\ en\ la} (2+y)^2-y^2=36$$

Despejamos Y, $4+y^2+4y-y^2=36 \rightarrow \boldsymbol{y=8} \xrightarrow[ecuación\ despejada]{sustituimos\ en\ la} \boldsymbol{x=10}$

Los números buscados son 8 y 10.

Ejercicio 2

Apartado a)

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3, \quad 0 \leq x \leq 3$$

Calculamos la derivada e igualamos a cero

$$f'(x) = -2x + 2 = 0 \rightarrow x = 1$$

Para comprobar que este valor es un máximo hacemos la segunda derivada y sustituimos

$$f''(x) = -2 < 0, \, es\ un\ máximo$$

El punto máximo de la función es (1,4)

Apartado b)

Veamos para que valor de x la derivada de la parábola es igual a cuatro (y'=4)

$$y' = -2x + 2 = 4 \rightarrow x = -1$$

Cuando x=-1, y=0, **el punto de tangencia es (-1,0)**

La ecuación de la recta tangente: y=4(x+1)→ $\boldsymbol{y = 4x + 4}$

Ejercicio 3

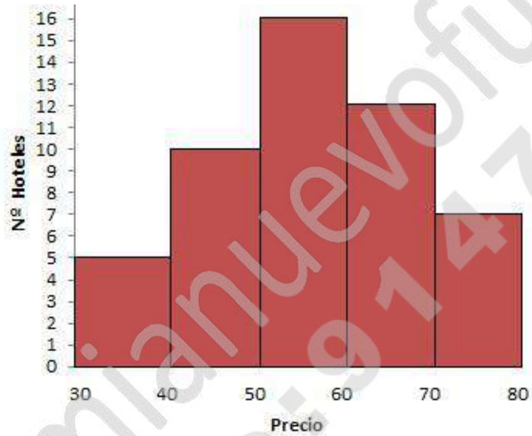
Se forma la tabla:

$L_i - L_s$	x_i	f_i	F_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
30-40	35	5	5	175	6.125
40-50	45	10	15	450	20.250

50-60	55	16	31	880	48.400
60-70	65	12	43	780	50.700
70-80	75	7	50	525	39.375
		$N = 50$		2.810	164.850

Apartado a)

Histograma de frecuencias absolutas (f_i):



Apartado b)

El precio medio es:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{N} = \frac{2.810}{50} = 56{,}2€$$

La mitad de los datos es $\frac{50}{2} = 25$. La primera frecuencia acumulada (F_i) mayor que 25 le corresponde a la clase (50, 60]. Por tanto, la clase mediana es (50, 60] y la mediana:

$$M = L_i + \frac{\frac{N}{2} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a_i = 50 + \frac{25 - 15}{16} \cdot 10 = 56{,}25€$$

Apartado c)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 f_i}{N} - \bar{X}^2} = \sqrt{\frac{164.850}{50} - 56{,}2^2} = 11{,}77€$$

Los hoteles con precio superior a 60€ corresponden a las clases 4ª y 5ª: $12 + 7 = 19$ hoteles

$$\frac{19}{50} = 0{,}38 \Rightarrow 38\% \text{ de los hoteles}$$

Ejercicio 4

Según el enunciado, la variable aleatoria X, “contenido real en kg”, se distribuye como una normal de media $\mu = 10$ y desviación típica $\sigma = 0{,}200$, $N\,(10;\ \ 0{,}200)$.

La variable Zsigue una ley Normal de media 0 y desviación típica 1,$N\,(0, 1)$, cuyas probabilidades están tabuladas:

$$Z = \frac{\mathrm{X} - 10}{0{,}200}$$

Apartado a)

$$P(X < 9{,}5) = P\left(Z < \frac{9{,}5 - 10}{0{,}200}\right) = P(Z < -2{,}5) = 1 - P(Z \leq 2{,}5) = 1 - 0{,}9938 =$$
$$= 0{,}0062 \rightarrow 0{,}62\%$$

Apartado b)

$$P(X \geq 10{,}3) = P\left(Z \geq \frac{10{,}3 - 10}{0{,}200}\right) = P(Z \geq 1{,}5) = 1 - P(Z \leq 1{,}5) = 1 - 0{,}9332$$
$$= 0{,}0668$$

AÑO 2010- OPCIÓN B

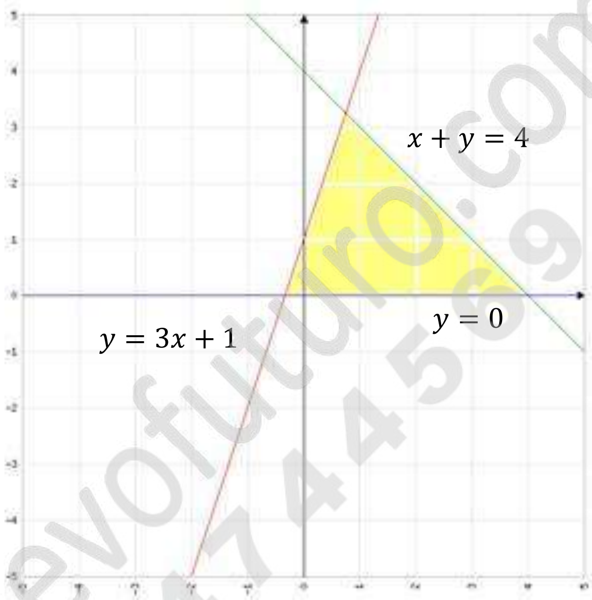
Ejercicio 1

Representación gráfica

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 3x + 1 \\ \end{cases}$$

$$x + y \leq 4$$

Representamos las rectas y vemos en que puntos se cortan:



$\begin{cases} y = 0 \\ = 3 \quad + 1 \end{cases} \rightarrow x = \frac{-1}{3}$ $\qquad A\left(\frac{-1}{3}, 0\right)_y \quad x$

$y = 0$
y

$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ x + y = 4 \end{cases} \rightarrow x = \frac{3}{4}, y = \frac{13}{4} \qquad C\left(\frac{3}{4}, \frac{13}{4}\right)$

$\{x + \quad = 4 \rightarrow x = 4 \qquad B(4,0)$

Máximo y mínimos de f(x,y)=x-3y en la región dada:

Calculamos los valores que toma f(x,y) en los puntos de corte A, B y C

$$F(A) = \frac{-1}{3}; \;\; F(B) = 4; \;\; F(C) = -9$$

La función de f(x,y)=x-3y es máxima en el punto B y mínima en el punto C.

Ejercicio 2

Con la Regla de Ruffini calculamos las soluciones de la ecuación dada, usando la solución que nos facilita el enunciado x_1=-5 tenemos:

| 1 | 8 | 5 | -50 |

-5		-5	-15	50
	1	3	-10	0

Ahora sacamos las soluciones de la ecuación que nos ha quedado

$$x^2+3x-10=0 \rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2} \rightarrow \frac{-3\pm 7}{2} \rightarrow \begin{matrix} x_2=2 \\ x_3=-5 \end{matrix}$$

Factorizamos el polinomio:

$$P(x)=x^3+8x^2+5x-50=(x+5)^2(x-2)$$

Ejercicio 3

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
16	6	256	36	96
21	15	441	225	315
12	4	144	16	48
-2	1	4	1	-2
8	-3	64	9	-24
$\sum x=55$	$\sum y=23$	$\sum x^2=909$	$\sum y^2=287$	$\sum xy=433$

$$\bar{x}=\frac{55}{5}=11 \qquad \sigma_x^2=\frac{909}{5}-11^2=60{,}8 \qquad \sigma_x=7{,}8$$

$$\bar{y}=\frac{23}{5}=4{,}6 \qquad \sigma_y^2=\frac{287}{5}-4{,}6^2=36{,}24 \qquad \sigma_y=6{,}02$$

$$\sigma_{xy}=\frac{433}{5}-11\cdot 4{,}6=36$$

Apartado a)

$$y=\bar{y}+m_{yx}(x-\bar{x})$$

$$m_{yx}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}=\frac{36}{60{,}8}=0{,}59 \rightarrow y=4{,}6+0{,}59(x-11)$$

$$y=0{,}59x-1{,}89$$

Apartado b)

$$r=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\cdot\sigma_y}=\frac{36}{7{,}8\cdot 6{,}02}=0{,}77$$

Ejercicio 4

En el enunciado se tratan dos variables aleatorias normales independientes: variedad A, $N(\mu_A, \sigma_A)$, y variedad B, $N(\mu_B, \sigma_b)$, siendo:

$$n_A = 600 \quad \mu_A = 30 \quad y \quad \sigma_A = 10$$

$$n_B = 400 \quad \mu_B = 34 \quad y \quad \sigma_B = 8$$

Se pide el rendimiento medio μ_T y la desviación típica σ_T de la totalidad de los árboles T, $N(\mu_T, \sigma_T)$

$$T = \frac{600}{1000} \cdot A + \frac{400}{1000} \cdot B = 0{,}6A + 0{,}4B$$

Sabiendo que:

$$X + Y \sim N\left(\mu_X + \mu_Y, \sqrt{\sigma_X{}^2 + \sigma_Y{}^2}\right) \qquad \text{y} \qquad (aX + b) \sim N(a\mu + b, \sqrt{a^2\sigma^2})$$

$$X \sim N\left(0{,}6\mu_A + 0{,}4\mu_B, \sqrt{0{,}6^2 \cdot \sigma_A{}^2 + 0{,}4^2 \cdot \sigma_B{}^2}\right)$$

Apartado a)

$$\mu_T = 0{,}6\mu_A + 0{,}4\mu_B = 0{,}6 \cdot 30 + 0{,}4 \cdot 34 = 31{,}6\ kg$$

Apartado b)

$$\sigma_T = \sqrt{0{,}6^2 \cdot \sigma_A{}^2 + 0{,}4^2 \cdot \sigma_B{}^2} = 6{,}8$$