EXAMEN EN ESPAÑOL

PARTE 1.- CUESTIONES

1. Una matriz A es diagonal si se cumple que:
   a) Todos los elementos de la diagonal principal son iguales.
   b) Es cuadrada y los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son todos iguales a 1.
   c) Ninguna de las otras.

Una matriz diagonal es aquella matriz cuadrada en la que todos los elementos excepto los de la diagonal principal son ceros ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Respuesta c) Ninguna de las otras.

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. El resultado de hacer $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$ es:
   a) No es posible hacer $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$. b) La matriz nula. c) Ninguna de las otras.

B·A=$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -16 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

Respuesta c) Ninguna de las otras.

3. Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, y sabiendo que el producto de $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ es $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ¿cuál es el valor de $\boldsymbol{x}$?
   a) $x = 2$ b) $x = -2$ c) Ninguna de las otras.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x-4 \\ -x+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2x-4=0; 2x=4; x=2

-x+2=0; x=2

Respuesta c) Ninguna de las otras.

4. Dada la inecuación $-x+3y-3 \geq 1$. Un punto solución es:
a) $(0,1)$ b) $(1,0)$ c) Ninguna de las otras.

Sustituyendo en la inecuación:

-0+3·1-3≥1; 0≥ 1FALSO

-1+3·0-3≥ 1; -4≥ 1 FALSO

Respuesta c) Ninguna de las otras.

5. ¿Cuál es el valor del siguiente límite $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{3}{x^2-9}$?
a) $+\infty$ b) El límite no existe c) Ninguna de las otras.

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{3}{x^2-9} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

Respuesta: a) $+\infty$

6. La función $f(x) = \frac{x^3}{x^2+3}$ tiene
a) Asíntota oblicua.
b) Asíntota vertical.
c) Asíntota oblicua y asíntota vertical.

Al ser el dominio R no tiene asíntota vertical. Como el grado del numerador es superior en 1 grado al grado del denominador no tiene asíntota horizontal pero sí asíntota oblicua.

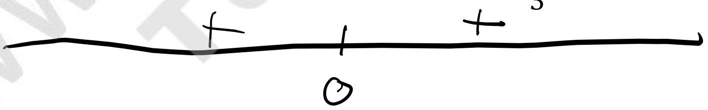
Respuesta a) Asíntota oblicua.

7. Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{x^3+1}$, es:
a) Decreciente en el intervalo $(0,+\infty)$.
b) Creciente en el intervalo $(0,+\infty)$.
c) Ninguna de las otras.

Para calcular el crecimiento y decrecimiento calculamos el signo de la derivada:

$f'_{(x)} = \frac{3x^2(x^3+1)-3x^2\cdot x^3}{(x^3+1)^2} = \frac{3x^5+3x^2-3x^5}{(x^3+1)^2} \frac{+3x^2}{(x^3+1)^2}$=0

$$3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{0}{3} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$



Respuesta b) Creciente en el intervalo $(0,\infty)$

8. Hallar $\int \left(e^{4x} - \frac{e^x}{4}\right) dx$

a) $\frac{e^{4x}}{4} - e^x + C$ b) $\frac{e^{4x}+e^x}{4} + C$ c) Ninguna de las otras.

$\int \left(e^{4x} - \frac{e^x}{4}\right) dx = \frac{1}{4}\int 4e^{4x}\,dx - \frac{1}{4}\int e^x\,dx = \frac{1}{4}e^{4x} - \frac{1}{4}e^x + C$

Respuesta c) Ninguna de las otras.

9. Si P es una probabilidad definida sobre el espacio muestral $E = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ con $P(w_1) = 0,15$; $P(w_2) = 4P(w_4)$ y $P(w_4) = 3P(w_3)$, halla $P(w_3)$.

a) $P(w_3) = 0,053125$.

b) $P(w_3) = 0,6375$.

c) Ninguna de las otras.

$$p_{\omega_1} + p_{\omega_2} + p_{w_3} + p_{\omega_4} = 1$$

$$0{,}15 + 4p_{\omega_4} + p_{w_3} + p_{\omega_4} = 1$$

$$p_{\omega_4} = 3p_{w_3}$$

Sustituyendo:

$$0{,}15 + 4 \cdot 3p_{w_3} + p_{w_3} + 3p_{w_3} = 1$$

$$12p_{w_3} + p_{w_3} + 3p_{w_3} = 1 - 0{,}15$$

$$16p_{w_3} = 0{,}85$$

$$p_{w_3} = \frac{0{,}85}{16} = 0{,}053125$$

Respuesta a) $p_{w_3} = 0{,}053125$

10. Si A y B son dos sucesos a un espacio muestral E, con $P(A/B) = \frac{1}{2}P(B/A)$, entonces:

a) Siempre que ocurre B, ocurre A.

b) La probabilidad de B es doble que la de A.

c) Ninguna de las otras.

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{pB}$$

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{pA}$$

Dividiendo ambas ecuaciones:

$$\frac{p(A/B)}{p(B/A)} = \frac{\frac{p(A \cap B)}{pB}}{\frac{p(A \cap B)}{pA}}$$

Teniendo en cuenta que:

$$p(A/B) = \frac{1}{2}p(B/A)$$

$$\frac{\frac{1}{2}p(B/A)}{p(B/A)} = \frac{\frac{p(A\cap B)}{pB}}{\frac{p(A\cap B)}{pA}}$$

Simplificando:

$$\frac{1}{2} = \frac{pA}{pB}$$

pB=2pA

Respuesta b) la probabilidad de B es el doble que la de A.

11. Si X es una variable aleatoria que sigue una distribución normal $N(\mu = 3, \sigma = 0,8)$, y se sabe que $P(X \geq a - 1) = 0,1056$ podemos afirmar que:
a) $a = 1,5$ b) $a = 5$ c) Ninguna de las otras.

$$p(x \geq a-1) = 0{,}1056 \Rightarrow p\left(z \geq \frac{a-1-3}{0{,}8}\right) = 0{,}1056$$

$$p\left(z \geq \frac{a-4}{0{,}8}\right) = 0{,}1056$$

$$p\left(z \leq \frac{a-4}{0{,}8}\right) = 0{,}8944$$

$$\frac{a-4}{0{,}8} = 1{,}25$$

a-4=1,25·0,8

a-4=1

a=5

Respuesta b) a=5

12. El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por $IC = \left(\overline{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, podemos afirmar que el error máximo admisible viene dado por:

a) $E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

b) $E = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma}{n}}$

c) $E = Z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Respuesta a) $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

PARTE 2.- PROBLEMAS

1. Las ventas de un supermercado de refrescos y aperitivos durante junio, julio y agosto del pasado año están en la matriz A, y los precios de venta en euros están en la matriz B:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Junio & Julio & Agosto \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1500 & 2600 & 3650 \\ 750 & 800 & 900 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} Refrescos \\ Aperitivos \end{array} \quad ; \quad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Refrescos & Aperitivos \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2,0 & 3,5 \\ 1,5 & 3,0 \\ 1,0 & 2,5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} Junio \\ Julio \\ Agosto \end{array}$$

a) Multiplicar las matrices para obtener los ingresos por la venta de refrescos en los 3 meses. ¿Qué elemento de la matriz nos da esa información? ¿A cuánto ascienden los ingresos por la venta de aperitivos?

b) Multiplicar las matrices para obtener los ingresos de ventas totales por meses. ¿En qué mes se alcanzó el máximo de ingresos? ¿Qué elemento de la matriz nos da esa información?

c) ¿Cuántos fueron los ingresos totales en los 3 meses?

a) Multiplicando la matriz A·B obtenemos la relación entre los ingresos de las ventas:

$$\begin{pmatrix} 1500 & 2600 & 3650 \\ 750 & 800 & 900 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3,5 \\ 1,5 & 3,0 \\ 1,0 & 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10550 & 22175 \\ 3600 & 7275 \end{pmatrix}$$

11.000€ Son los ingresos por refrescos: elemento 1,1

7.300€ Son los ingresos por aperitivos: elemento 2,2

b)

Ingresos Junio:

$$(2 \quad 3,5) \cdot \begin{pmatrix} 1500 \\ 750 \end{pmatrix} = (5.625€)$$

Ingresos Julio:

$$(1,5 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 2600 \\ 800 \end{pmatrix} = (6.300€)$$

Ingresos agosto:

$$(1 \quad 2,5) \cdot \begin{pmatrix} 3650 \\ 900 \end{pmatrix} = (5.900€)$$

c) Ingresos totales= 5.625+6.300+5.900=17825€

2. Encontrar la función cuya segunda derivada es $-12x$, y cuya gráfica presenta un mínimo en el punto $(-2, 0)$.

Y´´=-12x

Integrando

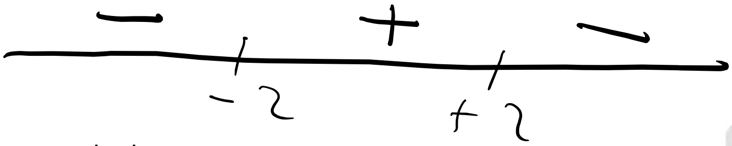
Y´=$\frac{-12x^2}{2} + C = -6x^2 + C$

Como tiene un mínimo en x=-2

$$y'(-2) = 0 \rightarrow -6 \cdot 2^2 + C = 0 \rightarrow C = 24$$

Y´=$-6x^2 + 24$

Confirmamos que efectivamente es un mínimo y no un máximo:



Integrando de nuevo

$$y = -\frac{6x^3}{3} + 24x + k = -2x^3 + 24x + k$$

Sustituyendo el punto (-2,0)

0=$-2 \cdot (-2)^3 + 24 \cdot (-2) + k \Rightarrow 0 = 16 - 48 + k \Rightarrow k = 32$

$y = -2x^3 + 24x + 32$

3. Se dispone de un dado tetraédrico trucado con cuatro caras con puntuaciones: 1, 2, 3, 4, de modo que $P(4) = 4P(1)$, $P(3) = 3P(1)$, $P(2) = 2P(1)$, en donde $P(4)$ indica la probabilidad de obtener la puntuación 4 y así sucesivamente.

Se dispone también de dos urnas con las siguientes composiciones:

U_1: 1 bola roja y 2 bolas verdes;

U_2: 2 bolas rojas y 3 bolas verdes.

Se lanza el dado. Si sale número par extraemos una bola de la urna U_1. Si sale impar extraemos una bola de la urna U_2. Se pide:

a) Determinar las probabilidades de los sucesos elementales que se presentan al lanzar el dado de cuatro caras.

b) Se lanza el dado y a continuación extraemos una bola de la urna que corresponda. Halla la probabilidad de que sea de color verde.

a)

P1+P2+P3+P4=1

P1+2P1+3P1+4P1=1

10P1=1

P1=$\frac{1}{10}$

P2=$\frac{2}{10}$

P3=$\frac{3}{10}$

P4=$\frac{4}{10}$

PU_1=P2+P4=$\frac{2}{10}+\frac{4}{10}=\frac{6}{10}$

PU_2=P1+P3=$\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{4}{10}$

b) P(verde)=$\frac{6}{10}\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{5}=\frac{8}{30}+\frac{12}{50}=0{,}51$