## Septiembre 2014-2015

## OPCION A

Problema nº1

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{15} = A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

$A^{-1} = \frac{(adj\ A)^t}{|A|}$

Se calcula el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

La matriz no tiene inversa ya que su deteminante es 0

b)

$B^{-1} = \frac{(adj\ A)^t}{|A|}$

Se calcula el determinante de B:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

2º Se calcula el adjunto de la matriz B:

$$(adj\ B) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$(adj\ B)^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

C=B·A$^t$·B$^{-1}$-2I=$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$|C| = 2 \Rightarrow |C^3| = |C|^3=2^3=8$

Problema nº2

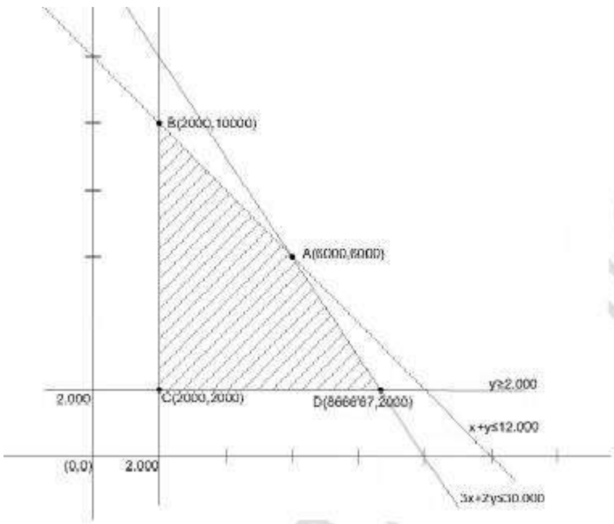
a)

La región factible se encontrará en el cuadrante I debido a que tanto la x como la y deben ser mayores o iguales a 2000.Por lo que el vértice que se obtiene entre estas 2 rectas es el punto A (2000,2000).

Para calcular los vértices de las otras rectas tendremos que hacer una tabla de datos. Una vez se representan las rectas se toman un punto de prueba para delimitar la región factible el (1,1).

| | | |
|---|---|---|
| X>2000 | 1<2000 | No se cumple |
| Y>2000 | 1<2000 | No se cumple |
| 3X+2y<30000 | 5<30000 | Se cumple |
| X+Y<12000 | 2>12000 | Se cumple |

Se representa gráficamente la zona factible de la función:




Los vértices que observan son A (2000,2000), B (2000,10000), C (6666,67,2000) y D(6000,6000).

a)

Para calcular el máximo se sustituyen los valores de los vértices que se han obtenido anteriormente en la función a maximizar.

| Vértice | X | y | Función |
|---|---|---|---|
| A | 2000 | 2000 | 11600 |
| B | 2000 | 10000 | 30000 |
| C | 6000 | 6000 | 34800 |
| D | 6666,67 | 2000 | 27933,345 |

El valor máximo de la función f(x,y)=3,25x+2,3y se corresponde con el vértice C. Con un beneficio de 34.800€

Problema nº3

a)

$$f(x) = 4x^3 - ax^2 - ax + 2$$

Se realiza la primera derivada para calcular para que valor de a hay en x=1/2 un punto critico

$f_x'$=$12x^2 - 2ax - a \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - a - a = 0$ ⇒3-2a=0⇒ $a = \frac{3}{2}$

Se realiza la segunda derivada para comprobar que es punto critico es un minimo

$$f(x)'' = 24x - 3 \rightarrow f(1/2)'' = 12 - 3 = 9\ Minimo$$

b)

$$\int_{-1}^{1} (4x^3 - 2x^2 - 2x + 2)dx = \left[x^4 - \frac{2x^3}{3} - x^2 + 2x\right]_{1}^{1} =$$

$$1 - \frac{2}{3} - 1 + 2 - \left(1 + \frac{2}{3} - 1 - 2\right) = -\frac{4}{3} + 4 = -\frac{4}{3} + \frac{12}{3} = \frac{8}{3}u^2$$

Problema nº4

a)

$$P(\bar{A}U\bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - 0{,}97 = 0{,}03$$

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}03}{0{,}07} = 0{,}428$$

Como $p(^A/_B) \neq pA$ ⇒Son sucesos independientes

b)

Ay C Son incompatibles

$p(^{A \cap B}/_C) = \frac{p(A \cap B \cap C)}{pC} = 0$ ya que $p(A \cap C) = 0$ por ser incompatibles.

Problema nº5

a)

El valor de $Z_{\propto/2}$ se calcula mediante el nivel de confianza.

$0{,}95=1-\propto\rightarrow\propto=0{,}05$

$$1-\frac{0{,}05}{2}=0{,}975$$

Se obtiene que el valor de $Z_{\propto/2}$ mediante las tablas de la distribución normal es de 1,96,es:

$$(\bar{x}-Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=$$

$$(160-1{,}96\cdot\frac{10}{\sqrt{100}};160+1{,}96\cdot\frac{10}{\sqrt{100}})$$

(158;162)

b)

$$E=Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\rightarrow 2{,}35=Z_{\propto/2}\frac{10}{8}\rightarrow Z_{\propto/2}=1{,}88$$

Mediante el uso de la tabla de la normal se obtiene que la probabilidad es del 97%.Se calcula el nivel de confianza:

$$N.C=1-2*(1-0{,}97)=0{,}94=94\%$$

## OPCION B

Problema nº1

a)

$$\begin{cases} x + y + az = a + 1 \\ ax + y + z = 1 \\ x + ay + az = a \end{cases}$$

1º Se escribe la matriz A y la matriz A*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a+1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & a \end{pmatrix}$$

2º Se calcula el valor de a que hace al determinante A=0

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = 0 = a + a^3 + 1 - 2a - a^2 = 0$$

$$a^3 - a^2 - a + 1 = (a+1)(a-1)^2 = 0$$

El determinante de la matriz es 0 cuando a=-1;a=1

Discusión del sistema:

Si a$\neq 1, -1\, |A| \neq 0 \rightarrow \text{Rg A} = 3 \quad \text{Rg A}^* = 3$ Sistema Compatible Determinado
Si a$= 1\, |A| = 0 \rightarrow \text{Rg A} = 1 \quad \text{Rg A}^* = 2$ Sistema Incompatible

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Si a$= -1\, |A| = 0 \rightarrow \text{Rg A} = 2 \quad \text{Rg A}^* = 2$ Sistema Compatible Indeterminado

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Las tres primeras columnas son proporcionales.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + 2\,z = 3 \\ 2x + y + \ z = 1 \\ x + 2y + \ 2z = 2 \end{cases}$$

Para calcular este sistema se utilizara el método de Kramer:

$$|A| = (a+1)(a-1)^2 = 3$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{3}$$

$$y = \frac{|A_Y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{3}$$

$$z = \frac{|A_Z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{3}$$

X=0; y=-1; z=2

Problema nº2

a)

$$f(x) = -8x^2 + 24x - 10$$

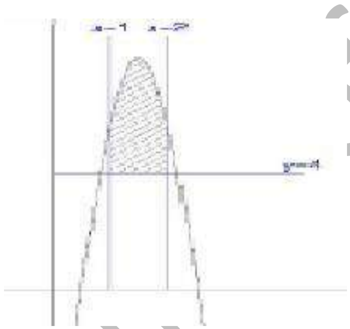
Para calcular los extremos relativos de una función se debe realizar la primera derivada e igualarla a 0.

$$f'(x) = -16x + 24 = 0$$

$$16x = 24 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -8\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 24\left(\frac{3}{2}\right) - 10 = 8$$

Máximo en $\left(\frac{3}{2}, 8\right)$



b)

$$\int_1^2 (-8x^2 - 24x - 10 - 4)dx = \left[-\frac{8}{3}x^3 - 12x^2 - 14x\right]_1^2 =$$

A=$\frac{10}{3}u^2$

Problema nº3

a)

Si x<0 f(x) es continua por ser una exponencial
Si x>0
en x=2 no existe la función por lo que no es continua en x=2
es por tanto continua en (0,2)$\cup(2,\infty)$
En x=0

$$\lim_{x\to 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^3}{(\dot{x}-2)^2} + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$f(0) = \frac{0^3}{(0-2)^2} + 1 = 1$$

b)
Asíntota vertical
Dominio

$$\mathbb{R} - \{2\}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3}{(\dot{x}-2)^2} + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2+} \frac{x^3}{(\dot{x}-2)^2} + 1 = +\infty$$

Asíntota vertical en x=2
Asíntota horizontal

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x-2)^2} + 1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2+4-4x} + 1 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2+4-4x}{x^2+4-4x} = \infty$$

No tiene asíntota horizontal
Asíntota oblicua
Y=mx+n

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{(x-2)^2}+1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2-4x+4}{\frac{x^2-4x+4}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2-4x+4}{x^3-4x^2+4x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left( \frac{x^3+x^2-4x+4}{x^2-4x+4} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-8x+4}{x^2-4x+4} = 5$$

Y=x+5

Problema nº4

a)

$$p(7 \cap p) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

b)

$$1 - P(\bar{P} \cap \bar{P} \cap \bar{P}) \rightarrow 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{63}{64}$$

$$P\left(\frac{B}{\bar{A}}\right) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0{,}7 - 0{,}3}{0{,}5} = \frac{4}{5}$$

Problema nº5

a)

El valor de $Z_{\propto/2}$ se calcula mediante el nivel de confianza.

0,95=1-∝→∝= 0,05

$$Z_{\propto/2} = 1 - \frac{0{,}05}{2} = 0{,}975$$

Se obtiene que el valor de $Z_{\propto/2}$ mediante las tablas de la distribución normal es de 1,96,es:

$$E = Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 15 = 1{,}96\frac{75}{\sqrt{n}} \rightarrow n = 96{,}04$$

b)

$\bar{x}$ —N(250,8,33)

$$P(\bar{x} > 230) \rightarrow P\left(Z > \frac{230 - 250}{8{,}33}\right) = P(Z > -2{,}4) =$$

$$= P(Z < 2{,}4) = 0{,}9918$$