Septiembre 2013-2014

OPCIÓN A

Problema nº1

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\alpha & 1 \\ 4 & -2\alpha & 2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & -\alpha & 1 & -\alpha \\ 4 & -2\alpha & 2 & \alpha - 3 \end{pmatrix}$$

2º Se calcula el valor de a que hace los menores de orden 2 sean 0

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 1 \\ 4 & 2\alpha & 2 \end{pmatrix} = 0 \to a = 1$$

Discusión del sistema:

Si $\alpha \neq 1$

$|A| \neq 0 \to \mathrm{Rg}\, A = 1 \quad \mathrm{Rg}\, A^* = 2$ Sistema Incompatible

Si $\alpha = 1$

$|A| = 0 \to \mathrm{Rg}\, A = 2 \;\; \mathrm{Rg}\, A^* = 2$ Sistema Compatible Indeterminado

b)

$$2x - y + z = -1 \to \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 + 2\alpha + \beta \\ z = \beta \end{cases}$$

Problema nº2

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x(x-2)}$$

a)

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x-3)^2}{x(x-2)} = \frac{\infty}{\infty} = 1$$

Asíntota horizontal en y=1

Asíntotas verticales:

Los valores de x que hacen el cociente infinito son los que hacen el denominador 0:

$$x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Asíntota vertical en x=2

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

Asíntota vertical en x=0

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \left[\frac{9}{0^-}\right] = -\infty$$

Asíntotas oblícuas

No existe asíntota oblicua porque hay asíntota horizontal

b)

$$f'(x) = \frac{3(x-3)(x^2-2x) + (-2x+2)(x-3)}{(x^2-2x)^2} = \frac{2(x-3)(2x-3)}{(x^2+x)^2}$$

$$2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

Se comprobará el crecimiento y el decrecimiento de la función por intervalos:

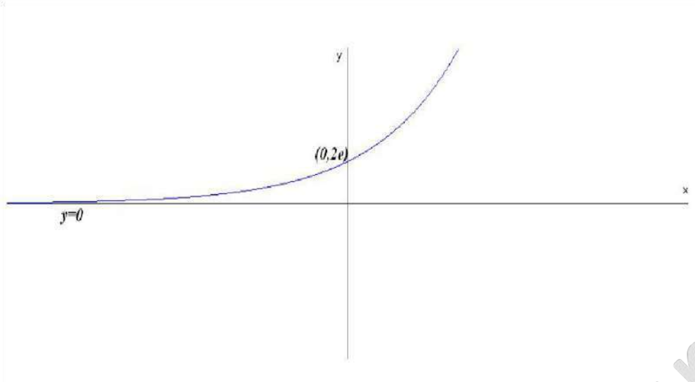
	(-∞ , 3/2)	(3/2 ,3)	(3 , ∞)
(x-3)(2x-3)(2)	+	-	+
(x^2-2x)^2	+	+	+
f´(x)	+	-	+

La función crece: (-∞3/2)U(3,∞)
La función decrece : (3/2,3)

En un entorno de x=4 es creciente

Problema nº3

a)



b)

$$\int_0^1 2e^{x+1} \rightarrow 2[e^{x+1}]_0^1 = 2e(e-1)u^2$$

Problema nº4

a)

$$P(mismopapel) = P(AA) + P(BB) + P(CC) = \frac{7}{22}\frac{6}{21} + \frac{3}{22}\frac{2}{21} + \frac{12}{22}\frac{11}{21} = \frac{30}{77}$$

b)

$$P(AAB) + P(ACB) + P(CAB) + P(CCB) = \frac{7}{22}\frac{6}{21}\frac{3}{20} + \frac{7}{22}\frac{12}{21}\frac{3}{20} + \frac{12}{22}\frac{7}{21}\frac{3}{20} + \frac{12}{22}\frac{11}{21}\frac{3}{20} = \frac{171}{1540} = 0{,}1111$$

Problema nº5

a)

$$\left(\bar{x} - Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\propto(2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (167{,}512; 170{,}48)$$

El valor de $Z_{\propto/2}$ se calcula mediante el nivel de confianza.

0,98=1-∝→∝= 0,02

$$Z_{\propto/2} = 1 - \frac{0{,}02}{2} = 0{,}99$$

Se obtiene que el valor de $Z_{\propto/2}$ mediante las tablas de la distribución normal es de
2,325:

$$E = Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}488$$

b)

El valor de $Z_{\propto/2}$ se calcula mediante el nivel de confianza.

0,90=1-$\propto\rightarrow\propto = 0{,}1$

$$Z_{\propto/2} = 1 - \frac{0{,}1}{2} = 0{,}95$$

Se obtiene que el valor de $Z_{\propto/2}$ mediante las tablas de la distribución normal es de 1,645:

$$E = Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow n = (Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{E})^2 = 25$$

OPCION B

Problema nº1

a)

Se calcula la matriz traspuesta de A

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se calcula la multiplicación de la matriz A con la traspuesta

$$A.A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0\,0 \\ 0 & 0\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se calcula el cuadrado de esta multiplicación:

$$A.A^{t^2} = \begin{pmatrix} 1\,0 & 0 \\ 0\,0 & 0 \\ 0\,0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que se concluye que:

$$A.A^{t^{200}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

Se calcula la ecuación propuesta

$$A.A^t - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Se calcula la inversa de esta ecuación:

$$M^{-1} = \frac{(adj\ A)^t}{|A|}$$

1º Se calcula el determinante de M:

$$|M| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -12$$

2º Se calcula el adjunto de la matriz A:

$$(adj\ A) = \begin{vmatrix} +\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

3º Se calcula la transpuesta del adjunto de la matriz A:

$$(adj\ A)^t = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

4º Se calcula la matriz inversa de A:

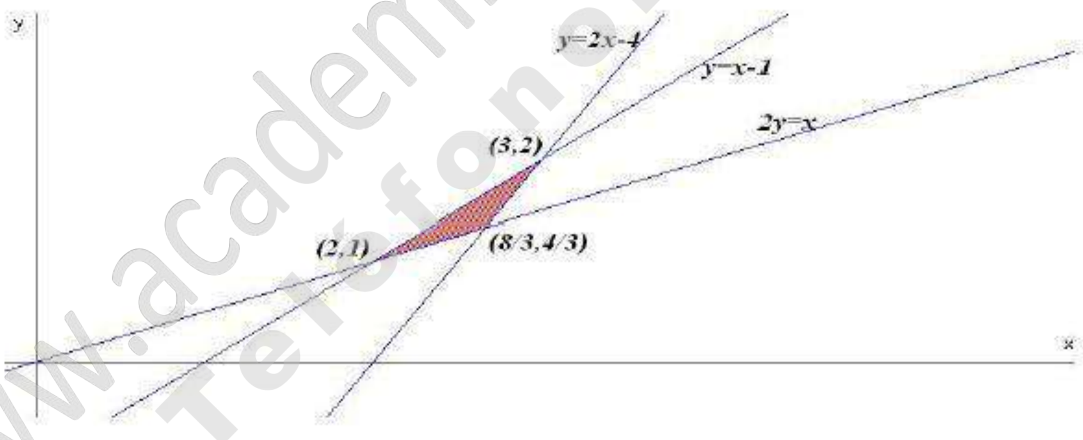
$$A^{-1} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

Problema nº2

La región factible se encontrará en el cuadrante I debido a que tanto la x como la y deben ser mayores o iguales a 0. Por lo que el vértice que se obtiene entre estas 2 rectas en el punto (0,3).

Para calcular los vértices de las rectas tendremos que hacer una tabla de datos. Una vez se representan las rectas se toman un punto de prueba para delimitar la región factible el (0,0).

y≤2x-4 0>-4 se cumple.
y≤x-1 0<-1 no se cumple
2y≥x 0>0 se cumple.



Para calcular el máximo se sustituyen los valores de los vértices que se han obtenido anteriormente en la función a maximizar f(x,y)=x-3y.

Vértice	y	x	Función
A	2	1	-1
B	3	2	-3
C	8/3	4/3	-4/3

La función se maximiza en A y se minimiza en B

Problema nº3

a)

Primero se calcula el valor y de la función en x=-1

$$y = f(-1) = \frac{\lambda x}{4 + x^2} = 0$$

Para calcular la tangente a una función se realiza la primera derivada con la que se obtiene la pendiente de la recta tangente.

$$f'(x) = \frac{\lambda(4 + x^2) - 2x\lambda x}{(4 + x^2)^2} = \frac{\lambda(4 - x^2)}{(4 + x^2)^2}$$

Para calcular la pendiente en el punto x=1 se sustituye la x en la primera derivada. En este caso la primera derivada tiene que ser igual a la pendiente de la recta paralela:

$$f'(-1) = \frac{\lambda(4 - x^2)}{(4 + x^2)^2} \rightarrow 2 = \frac{3}{5^2}\lambda \rightarrow \lambda = \frac{50}{3}$$

b)

$$\int_0^2 \frac{x}{4 + x^2}$$

se realiza un cambio de variable:

$$u = 4 + x^2$$

$$du = 2x$$

$$\int_0^1 \frac{x}{4 + x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{du/2}{u} = 1/" \int_0^{\pi/2} \frac{du}{u} = \frac{1}{2}[\,Ln\, u]_0^1 = \frac{1}{2}[\,Ln\, 4 + x^2]_0^2 = \frac{Ln2}{2}$$

Problema nº4

a)

$$P(F) = P(F/E)P(E) + P(F/J)P(J) + P(F/S)P(S)$$

P(F)=0.56

b)

Se utiliza el teorema de Bayes:

$$P\left(\frac{S}{\bar{F}}\right) = \frac{P(S)P(\frac{\bar{F}}{S})}{P(F)}$$

$$P(S/\bar{F}) = 0.64$$

Problema nº5

$$E = Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$E = Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 3{,}290 = 1{,}646\frac{\sigma}{\sqrt{n1}} \rightarrow n1 = 0{,}25\sigma^2$$

$$E = Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 7{,}840 = 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n2}} \rightarrow n2 = 0{,}0625\sigma^2$$

$$n1 = n2 + 7500 \rightarrow 0{,}25\sigma^2 = 0{,}0625\sigma^2 + 7500 \rightarrow \sigma = 200$$

$$n1 = 0{,}25\sigma^2 = 10000 \qquad n2 = 0{,}0625\sigma^2 = 2500$$