Septiembre 2012-2013

Opción A

Problema nº1

a)

$A^{-1}=\frac{(adj\ A)^t}{|A|}$

1º Se calcula el determinante de A:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

2º Se calcula el adjunto de la matriz A:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

3º Se calcula la transpuesta del adjunto de la matriz A:

$$Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

4º Se calcula la matriz inversa de A:

$$A^{-1}=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

Como en el apartado anterior se calculo la matriz inversa de A y por las propiedades de las matrices se sabe que $A^{-1}.A = I$ se efectúa el siguiente cambio en el sistema de ecuaciones:

$$A.X = B - I \to A^{-1}A.X = A^{-1}(B - I)$$

Se calcula la matriz X:

$B - I = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

X=$\frac{-1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 12 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

Problema nº2

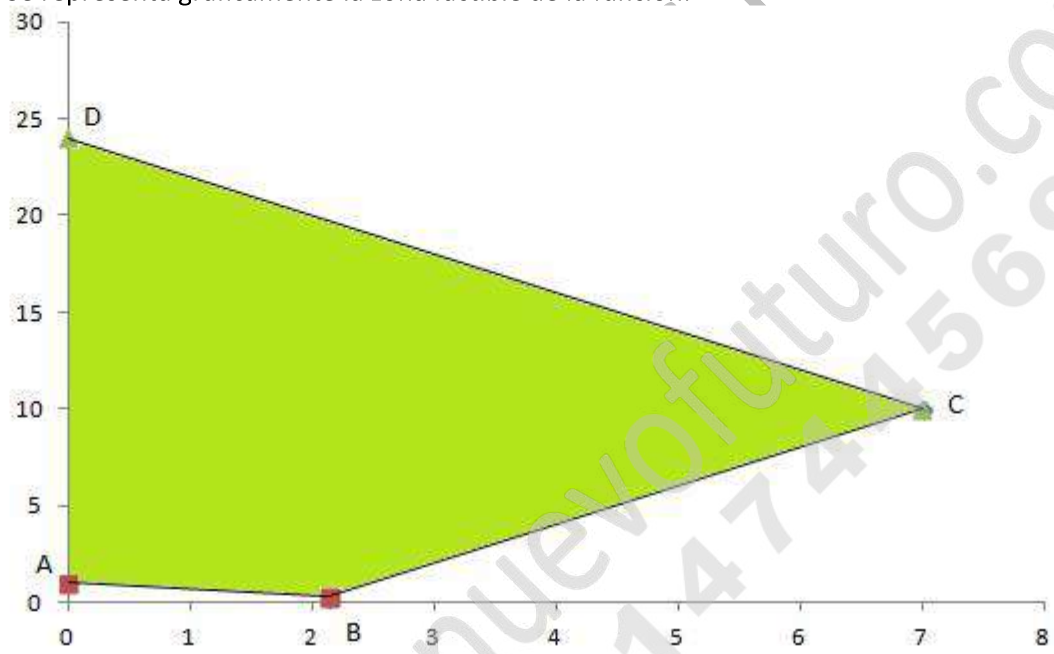
a) La región factible se encontrará en el cuadrante I debido a que tanto la x como la y deben ser mayores o iguales a 0. Por lo que el vértice que se obtiene entre estas 2 rectas es el origen de ordenadas (0,0).

Para calcular los vértices de las otras 3 rectas tendremos que hacer una tabla de datos. Una vez se representan las 23rectas se toman un punto de prueba para delimitar la región factible el (0,0).

Los vértices que observan son A (0,1), B (15/7,2/7), D (0,24) y C (7,10).

b) Para calcular el máximo se sustituyen los valores de los vértices que se ha
$x+3y>3$ $0<3$ No se cumple.
$2x+y<24$ $0<24$ Se cumple.
$2x-y<4$ $0<4$ Se cumple

Se representa gráficamente la zona factible de la función:



n obtenido anteriormente en la función a maximizar.

Vértice	x	y	Función
A	0	1	1
B	15/7	2/7	47/7
C	7	10	31
D	0	24	24

El valor máximo de la función $f(x,y)=3x+y$ se corresponde con el vértice C.

Problema nº3

a) Se procede a calcular las asíntotas de la función:

- Asíntotas verticales: $\lim_{x \to a} \frac{x^3}{x^2-9} = \infty$

Los valores de x que hacen infinita la función son lo que anulan el denominador.

Por lo que existirá asíntotas verticales en x=-3 y x=3

X=-3

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{x^3}{x^2-9} = \frac{-27}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{x^3}{x^2-9} = \frac{-27}{0^-} = +\infty$$

X=1

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^3}{x^2-9} = \frac{27}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^3}{x^2-9} = \frac{27}{0^+} = +\infty$$

- Asíntotas Horizontales

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^2-9} = \frac{\infty}{\infty} = \infty$$

No existen asíntotas horizontales.

- Asíntota Oblicua: Al no existir asíntotas horizontales puede existir asíntotas oblicuas.

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-9}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^3-9x} = \frac{\infty}{\infty} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \infty} (\frac{x^3}{x^2-9} - mx) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x^3 - 9x}{x^2-9} = \lim_{x \to \infty} \frac{9x}{x^2-9} = \frac{\infty}{\infty} = 0$$

Asíntota oblicua: y=x

b)

Primero se calcula el valor y de la función en x=1

$$y = f(1) = \frac{1}{1-9} = -\frac{1}{8}$$

Para calcular la tangente a una función se realiza la primera derivada con la que se obtiene la pendiente de la recta tangente.

$$f'(x) = x^2(\frac{x^2-27}{(x^2-9)^2})$$

Para calcular la pendiente en el punto x=1 se sustituye la x en la primera derivada.

$$f'(1) = \frac{1-27}{(1-9)^2} = -\frac{26}{64} = -\frac{13}{32}$$

La pendiente de la función en x=1 es -13/32. Para calcular la recta tangente se debe obtener la ordenada en el origen mediante la ecuación explicita de la recta :

$$y = mx + n \rightarrow \frac{-1}{8} = -\frac{13}{32}.1 + n \rightarrow n = \frac{9}{32}$$

$$y = -\frac{13}{32}x + \frac{9}{32}$$

Problema nº4

a)

Primero se definen las probabilidades que se conocen por el enunciado:

Probabilidad de viajar en turista P(T)=2/3
Probabilidad de viajar en preferente P(P)=1/3
Probabilidad de hablar inglés si viaja en preferente P(I/P)=1
Probabilidad de no hablar inglés si viaja en turista y P($\bar{I}$ /T)=0,4

Se calcula la probabilidad de ser turista y hablar inglés:

$$1 = \mathrm{P}\left(\frac{\bar{\mathrm{I}}}{\mathrm{T}}\right) + \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{T}}\right) \rightarrow \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{T}}\right) = 0{,}6$$

Se calcula la probabilidad de que un viajero hable ingles:

$$P(I) = P(P).\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{P}}\right) + \mathrm{P(T)}.\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{T}}\right) = \frac{1}{3}.1 + \frac{2}{3}.0{,}6 = 0{,}7333$$

b)

La probabilidad de que hablando inglés sea turista se calculara mediante la probabilidad de que sea turista y hable inglés entre la probabilidad de hablar ingles.

$$P(T/I) = \frac{P(T).P(I/T)}{P(I)} = \frac{0{,}666.0{,}6}{0{,}7333} = 0{,}5455$$

Problema nº5

a)

$$(\bar{x} - Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

El valor de $Z_{\propto/2}$ se calcula mediante el nivel de confianza.

0,95=1-∝→ $\alpha = 0{,}05$

$$1 - \frac{0{,}05}{2} = 0{,}95$$

Se obtiene que el valor de $Z_{\propto/2}$ mediante las tablas de la distribución normal es de 1,96, por lo que intervalo de confianza es:

$$\left(1.75 - 1.96 \cdot \frac{0.4}{\sqrt{400}};\ 1.75 + 1.96 \cdot \frac{0.4}{\sqrt{400}}\right)$$

(1,71;1,79)

b) $E = Z\propto_{/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \Rightarrow \sqrt{N} = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{E} \Rightarrow \mu = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 \Rightarrow N = \left(\frac{1{,}645 \cdot 0.4}{0.02}\right)^2 = 1.083$

Opción B

Problema nº1

a)

1º Se escribe la matriz A y la matriz A*

$$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & k & -2 \\ k & -3 & k \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} k & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & -2 & 1 \\ k & -3 & k & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A y lo igualamos a 0

K^3-2k-k-6k=0⇒k·(K^2-9)=0

K=0, k= ± 3

Discusión del sistema:

Si k$\neq 0, \pm 3 \, |A| \neq 0 \ \rightarrow \mathrm{Rg\ A} = 3 \quad \mathrm{Rg\ A^*} = 3 \quad$ Sistema Compatible Determinado

Si k=0

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \ A^*=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

$|A| = 0 \ \rightarrow \mathrm{Rg\ A} = 2 \quad \mathrm{Rg\ A^*} = 2 \quad$ Sistema Compatible Indeterminado

El rango de A* es 2 porque la fila 3 y la fila 1 de la matriz son combinación lineal

Si k= 3

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \ A^*=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ R(A)=2

$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$=+9≠ 0 R(A*)=3

Sistema incompatible

Si k=-3

$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ A*=$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$ R(A)=2

$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ R(A*)=3

Sistema incompatible

b) Resuélvase para k=1

$$\begin{cases} x & y & 0 & = & 0 \\ x & y & -2z & = & 1 \\ x & -3y & z & = & 0 \end{cases}$$

Para calcular este sistema se utilizara el método de Cramer:

$$|A| = k^3 - 9k = -8$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{1}{8}$$

$$Y = \frac{|A_Y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-1}{8}$$

$$z = \frac{|A_Z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{-8} = -\frac{1}{2}$$

Problema nº2

a)

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} ax^2 - 3 = a - 3$$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} ln(2x-1) = ln\,1 = 0$
$f(1) = a \cdot 1^2 - 3 = a - 3$
a-3=0; a=3La función es continua si a=3.

b)

Función x<1:

Dominio: (-∞,1)
Puntos de corte: A(1,0), B(-1,0), C(0,-3)

$$f´(x) = 6x$$

Decreciente desde (-∞,0) y creciente desde (0,1)
Existe un mínimo en el punto C(0,-3)

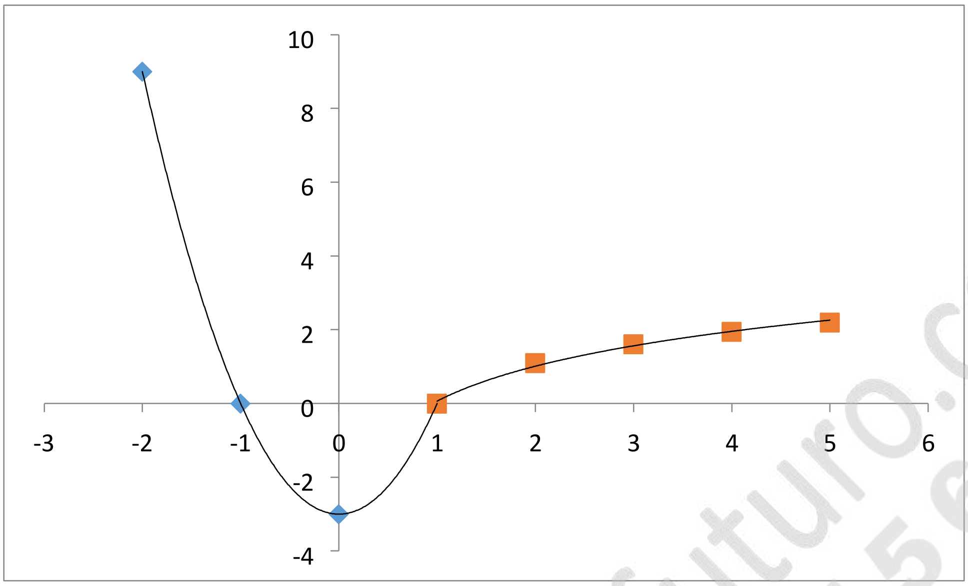
Función x>1:

Dominio: ($\frac{1}{2}$,∞)
Puntos de corte: A(1,0)

$$f´(x) = \frac{1}{2x-1}.2$$

Función creciente desde (1,∞)
No existe ningún extremo relativo

REPRESENTACION GRAFICA



Problema nº3

a)

Los extremos relativos de una función son los puntos en el que la primera derivada se anula, es decir , los puntos en el que ocurre un cambio en el crecimiento de la función.

$$f'(x) = \frac{1.(x^2+4) - x(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$$

La primera derivada es igual a 0 en x=2 y x=-2. Mediante el siguiente grafico podemos observar la tendencia de la función.

	(-∞,-2)	(-2,2)	(2,∞)
4-x^2	-	+	-
(x^2+4)	+	+	+
f´(x)	-	+	-

La función decrece de (-∞,-2)U(2,∞).
La función crece de (-2,2)

En la función hay un máximo en el punto A (2,1/4) y un mínimo en el punto B (-2,-1/4).

b)

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}ln(x^2+4)\left[{}_2^1 = \frac{1}{2}(ln\,5 - ln\,4) = \frac{1}{2}ln\frac{5}{4} = \frac{ln\sqrt{5}}{2}\right.$$

Problema número 4

La probabilidad de que el segundo caramelo sea de fresa será :

P(F2)=P(M1).P(F2/M1)+P(F1).P(F2/F1)=$\frac{7}{17}\cdot\frac{12}{18}+\frac{10}{17}\cdot\frac{9}{18} = 0,57$

b)

La probabilidad de que el segundo caramelo sea del mismo sabor que el primero será :

PF2=P(M1).P(M2/M1)+P(F1).P(F2/F1)= $\frac{7}{17}\cdot\frac{6}{18}+\frac{10}{17}\cdot\frac{9}{18} = 0,43$

.

Problema nº5

$$\bar{x} \sim N\left(\mu;\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) \to \bar{x} \sim N\left(\mu;\frac{210}{\sqrt{64}}\right) \to \bar{x} \sim N(\mu; 26{,}25)$$

a)$p|\bar{x}-\mu| \geq 22 = P\big((\bar{x}-\mu) \leq -22\big) + P\big((\bar{x}-\mu) \geq 22\big)$
$P\big((\bar{x}) \leq -22+\mu\big)$ +P$\big((\bar{x}) \geq 22+\mu\big)$
Tipificando:
$P\big((\bar{x}) \leq -22+\mu\big)$ +P$\big((\bar{x}) \geq 22+\mu\big)$ = $P\left(z \leq \frac{-22+\mu-\mu}{26,25}\right)$ +P$\left(z \geq \frac{22+\mu-\mu}{26,25}\right)$
= $P(z \leq -0.84)$ +P$(z \geq 0{,}84)$ =2· P$(z \geq 0{,}84)$ =2·(1- P$(z < 0{,}84)$) =2·(1-0,7995)=0,401

b)

$$1-\frac{0{,}01}{2}=0{,}995$$

Se obtiene que el valor de $Z_{\propto/2}$ mediante las tablas de la distribución normal es de 2,58, por lo que intervalo de confianza es:

$$(\bar{x}-Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

$$\left(1532-2{,}58\cdot\frac{210}{\sqrt{64}};1532-2{,}58\cdot\frac{210}{\sqrt{64}}\right)$$

$$(1464\,,1600)$$