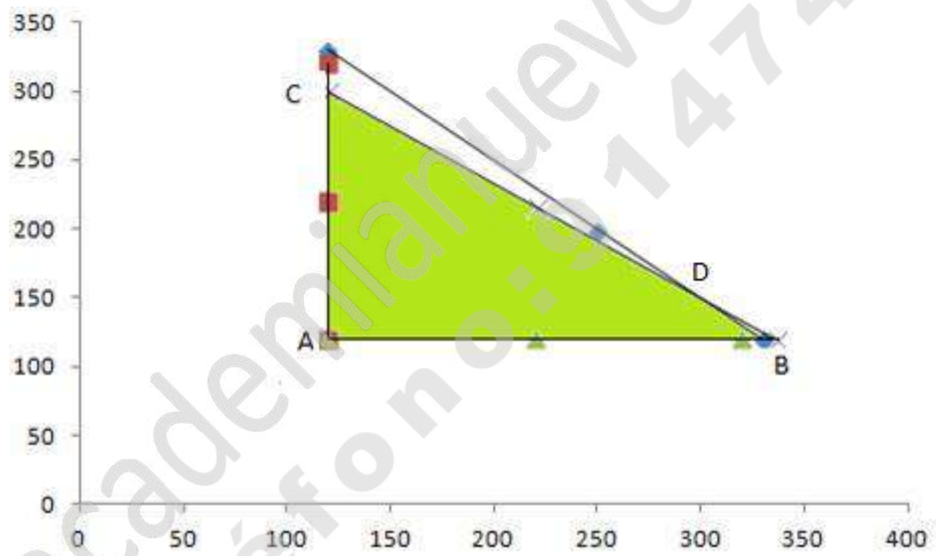
Septiembre 2011-2012 OPCION A

Problema nº1

a) La región factible se encontrará en el cuadrante I debido a que tanto la x como la y deben ser mayores o iguales a 120. Por lo que el vértice que se obtiene entre estas 2 rectas es el punto A (120,120).

Para calcular los vértices de las otras rectas tendremos que hacer una tabla de datos. Una vez se representan las rectas se toman un punto de prueba para delimitar la región factible el (0,0).

10(x+y)>75.60 -> x+y<450 0>450 Se cumple x+1,2y<480
0<480 Se cumple
$x \geq 120; y \geq 120$
Se representa gráficamente la zona factible de la función:



Los vértices que observan son A (120,120), B (330,120), C (120,300) y D(300,150)

b)
Para calcular el máximo se sustituyen los valores de los vértices que se han obtenido anteriormente en la función a maximizar.

Vértice	X	y	Función
A	120	120	840
B	330	120	1470
C	120	300	1560
D	300	150	1500

El valor máximo de la función f(x,y)=3x+4y se corresponde con el vértice C.

Problema nº2

a)

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x(2x-1)}{x-1}=\frac{\infty}{\infty}\to L, Hopital \to \frac{4x-1}{1}=\infty$$

No existe asíntota horizontal

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to a}\frac{x(2x-1)}{x-1}=\infty$$

Los valores de x que hacen el cociente infinito son los que hacen el denominador 0:

$$x-1=0 \qquad x=1$$

Asíntota vertical en x=1

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x(2x-1)}{x-1}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x(2x-1)}{x-1}=+\infty$$

Asíntotas oblicuas

Al no existir asíntotas horizontales puede existir asíntotas oblicuas.

Asíntota oblicua: y=2x+1

Extremos relativos

Para calcular los extremos relativos de una función se debe realizar la primera derivada e igualarla a 0.

$$f'(x) = \frac{(4x-1)(x-1) - x(2x-1)}{x-1} = \frac{2x^2-4x+1}{x-1}$$

$$2x^2-4x+1=0 \rightarrow \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{4} \begin{cases} x = 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = 1-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Se comprobara el crecimiento y el decrecimiento de la función por intervalos:

	(-∞ , 0,3)	(0,3 , 1)	(1 , 1,71)	(1,71 , ∞)
x^2-4x+1	+	-	-	+
(x-1)^2	+	+	+	+
f´(x)	+	-	-	+

La función crece: (-$\infty, 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$)U (1 $+\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty$)

La función decrece : ($1-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1$) U (1, $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$)

Máximo relativo: ($1-\frac{\sqrt{2}}{2}, 3-2\sqrt{2}$)

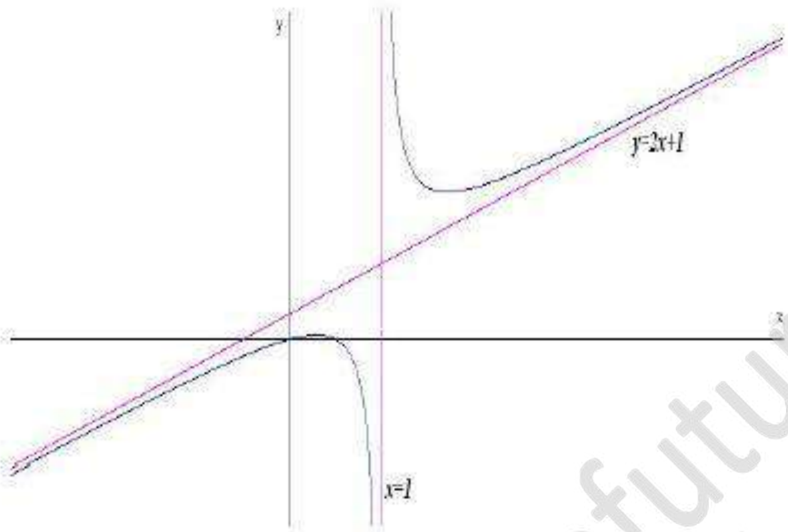
Mínimo relativo: ($1+\frac{\sqrt{2}}{2}, 3+2\sqrt{2}$)

b)

Representación de la función:

Dominio: R-{1}

Puntos de corte A(0,0) y B(1/2,0)



c)

$$\int_2^5 \frac{\frac{2x^2-x}{x-1}}{x^2} dx = \int_2^5 \frac{2x-1}{x^2-x} \cdot dx$$

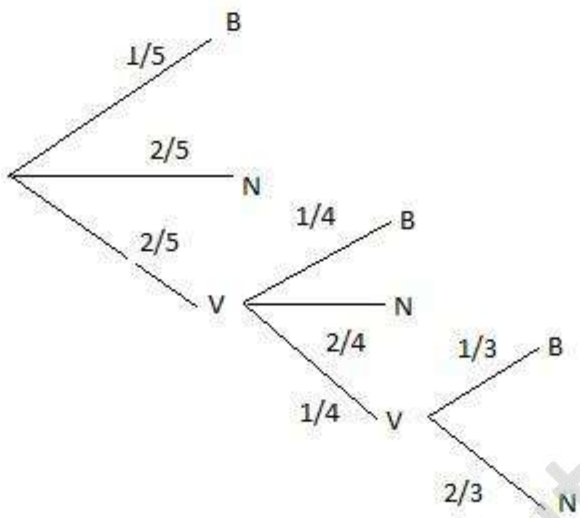
Se trata de una integral por cambio de variable: $\ln|x^2 - x|_{2=}^{5}$

$$(Ln\ 20 - \text{Ln}\ 2) = Ln\left(\frac{20}{2}\right) = Ln(10)$$

Problema nº3

a)

Se realiza un diagrama de árbol



La probabilidad de que el jugador gane:

$$P(B) = P(B1) + P(V1).P(B2/V1) + P(V1).P(V2/V1).P(B3/V2)$$
$$P(B) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}.\frac{1}{4} + \frac{2}{5}.\frac{1}{4}.\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

b)

Primero se calcula lo probabilidad de no ganar.

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{2}{3}$$

Se calcula la probabilidad de perder condicionada por solo haber abierto una caja:

$$p\left({}^{N_1}/_{\bar{B}}\right) = \frac{p(N_1 \cap \bar{B})}{p\bar{B}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Problema nº4

a)

El intervalo de confianza para la media a partir de la media de las muestras es:

$$(\bar{x} - Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

El valor de $Z_{\propto/2}$ se calcula mediante el nivel de confianza.

0,90=1-∝→∝= 0,1

$$1-\frac{0{,}1}{2}=0{,}95$$

Se obtiene que el valor de $Z_{\propto/2}$ mediante las tablas de la distribución normal es de 1,645, por lo que intervalo de confianza es:

$$\left(48000-1.645\frac{3000}{\sqrt{100}};48000+1{,}645\frac{3000}{\sqrt{100}}\right)$$

$$(47506{,}5: 48493{,}5)$$

b)

El valor de $Z_{\propto/2}$ se calcula mediante el nivel de confianza.

0,95=1-∝→∝$=0{,}05$

$$1-\frac{0{,}05}{2}=0{,}95$$

Se obtiene que el valor de $Z_{\propto/2}$ mediante las tablas de la distribución normal es de 1,96, por lo que intervalo de confianza es:

$$n=\left(\frac{z\alpha/_2\cdot\sigma}{E}\right)^2=\left(\frac{1.96\cdot 3000}{1000}\right)^2=35$$

OPCION B

Problema nº1

a)

1º Se escribe la matriz A y la matriz A*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 2 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & k & 2 & 5 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2º Se calcula el valor de a que hace al determinante A=0

$$k + 2k + 1 - k^2 - 1 - 2 = -k^2 + 3k - 2 = 0$$

El determinante de la matriz es 0 cuando k=2 y k=1

Discusión del sistema:

Si k$\neq$ 2,1 $|A| \neq 0 \ \rightarrow \mathrm{Rg}\, A = 3 \quad \mathrm{Rg}\, A^* = 3 \quad$ Sistema Compatible Determinado

Si k= 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 RA = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 10 + 2 - 8 - 1 - 5 = 0$$

Todos los determinantes de tamaño 3 valen 0 RA*=2 Sistema compatible indeterminado

Si k= 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 RA = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 5 + 2 - 4 - 1 - 5 \neq 0 \text{ RA*=3}$$

Sistema incompatible

b) Resuélvase para k=0

$$\begin{cases} x & y & z & = & 2 \\ x & 0 & 2z & = & 5 \\ 0 & y & z & = & 1 \end{cases}$$

Para calcular este sistema se utilizará el método de Cramer:

$$|A| = -(k-2)(k-1) = -2$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = 1$$

$$Y = \frac{|A_Y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = -1$$

$$z = \frac{|A_Z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = 2$$

c)

x+y+z=2

2x+y+z=1

Z=t

x+y=2-t

2x+y=1-t

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ 1-t & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2-t-1+t}{1-2} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2-t \\ 2 & 1-t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1-t-4+2t}{1-2} = \frac{t-3}{-1} = -t+3$$

Problema nº2

a)

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & si\ x \leq 1 \\ x^3 - x^2 + 1 & si\ x > 1 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 1^+} x^3 - x^2 + 1 \ = 1$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1^-} ax + b = a + b$

f(1)=a+b

Para que una función por partes sea continua los valores de f en la discontinuidad deben ser los mismos. a+b=1

Para comprobar si una función es derivable se tiene que derivar y comprobar que los limites en el punto de discontinuidad de esa derivada son iguales.

$$f'_{(x)} = \begin{cases} a & x < 1 \\ 3x^2 - 2x & x > 1 \end{cases}$$

$f'(1^-)=a \quad f'(1^+)=3-2=1; a=1$

Para que la función sea derivable a=1 es decir la derivabilidad no depende del valor de b, se calculara para que la función sea continua.

$$a+b=1 \rightarrow b=0$$

La función será continua y derivable para a=1 y b=0.

b)

Las rectas paralelas tienen la misma pendiente por lo que nuestra tangente tendrá m=8 lo que quiere decir que habrá que calcular la derivada de la función e igualarla a 8.

$$f'_{(x)}=\begin{cases}0 & x<1\\ 3x^2-2x & x>1\end{cases}$$

Se puede observar que para valores x<1 la derivada es 0 así que solo habrá que analizar la función x>1.

$$f'(x)=3x^2-2x=8$$

Las soluciones de esa ecuación son x=2 y x=-4/3. Se selecciona la x=2 debido a que es la única solución mayor que x>1

Se calcula el valor y de la función en x=2

$$y=f(2)=x^3-x^2+1=5$$

La pendiente de la función en x=2 es 8. Para calcular la recta tangente se debe obtener la ordenada en el origen mediante la ecuación explicita de la recta :

$$y=mx+n \rightarrow 5=8.2+n \rightarrow n=-11$$

$$y = 8x - 11$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ x < 1 \\ x^3 - x^2 + 1 & si\ x > 1 \end{cases}$$

$$g(x) = 1 - 2x^2$$

Se calcula primero los puntos de corte entre la f(x) y la g(x):

$$x = 1 - 2x^2 \rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

Las funciones se cortan es x=-1 y x=1/2 ambos valores son validos ya que se cumple que x<1.

$$x^3 - x^2 + 1 = 1 - 2x^2 \rightarrow x^2(x+1) = 0$$

Las funciones se cortan es x=-1 y x=0 ambos valores no son validos debido a que no se cumple que x>1.

Se realizara la integral entre los valores obtenidos de la primera función:

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}} g(x)dx - \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} 1 - 2x^2 dx - \int_{-1}^{\frac{1}{2}} x\,dx$$

$$\left[x - \frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12} + 1 - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{12} + \frac{3}{8} = \frac{27}{24} = \frac{9}{8}u^2$$

Problema nº3

a)

P(A)=1/3 P(B/A)=1/4 P(AUB)=1/2

Para calcular la probabilidad de A y B se utiliza el teorema de bayes

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3}.\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

b)

c)

$$P(A\ U\ B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow \mathrm{P(B)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

Para calcula la $P(\bar{B}/A)$ se utilizara el teorema de bayes:

$$P\left(\frac{\bar{B}}{A}\right) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)}$$

La probabilidad A y no B se define como la probabilidad de A menos la probabilidad de (A y B).

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$P\left(\frac{\bar{B}}{A}\right) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

d)

Para calcula la $P\left(\frac{\bar{A}}{\bar{B}}\right)$ se utilizara el teorema de bayes:

$$P\left(\frac{\bar{A}}{\bar{B}}\right) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$$

La probabilidad de no A y no B se define como el total menos la probabilidad de (A U B).

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A\ U\ B) = \frac{1}{2}$$

$$P\left(\frac{\bar{A}}{\bar{B}}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

Problema 4

$$\bar{x} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\bar{x} \sim N\left(\mu; \frac{3}{\sqrt{121}}\right)$$

$$\bar{x} \sim N(\mu; 0{,}27)$$

$$p|\bar{x} - \mu| > 0.5 = p[(\bar{x} - \mu) > 0.5] + p[(\bar{x} - \mu) < -0.5] =$$

$$p[(\bar{x}) > 0.5 + \mu] + p[(\bar{x}) < -0.5 + \mu] =$$

$$Tipificando$$

$$p\left[z > \frac{0.5 + \mu - \mu}{0{,}27}\right] + p\left[(z) < \frac{-0.5 + \mu - \mu}{0{,}27}\right] = p\left[z > \frac{0.5}{0{,}27}\right] + p\left[(z) < \frac{-0.5}{0{,}27}\right] =$$

$P(z >$1,85)+Pz(<-1,85)=1-0,9678+1- 0.9678=0,0644

b)

El valor de $Z_{\propto/2}$ se calcula mediante el nivel de confianza.

0,95=1-∝→∝= 0,05

$$1 - \frac{0{,}05}{2} = 0{,}975$$

Se obtiene que el valor de $Z_{\propto/2}$ mediante las tablas de la distribución normal es de 1,96, por lo que intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

$\left(7 - 1.96 \cdot \frac{3}{\pi_1}; 7 + 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{121}}\right)$

$(6{,}565{:}\ 7{,}535)$