

 Universidad Carlos III de Madrid	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2024-2025 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	B
INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN El examen consta de 4 ejercicios: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas. CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos. DURACIÓN: 90 minutos.		

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

El dueño de una frutería quiere alquilar una cámara frigorífica para la campaña de sandías del verano. Entre las diferentes cámaras que puede alquilar cercanas a su frutería, la que más le convence es una que tiene capacidad para guardar 2700 kilos de sandía que es, según sus datos de años anteriores, la cantidad de kilos que vende cualquier semana de la campaña. Las sandías que vende son de tres variedades: sandía verde rayada, sandía negra sin pepitas y sandía negra con pepitas. La sandía rayada es la menos apreciada por su clientela, por ello decide ponerle el precio más bajo y la venderá a 1,25 euros el kilo. Las sandías negras son las más demandadas entre su clientela, pero entre estas dos variedades es más fácil vender la variedad sin pepitas. Por esta razón, determina que el precio de la sandía negra sin pepitas sea de 2,75 euros el kilo y el precio con pepitas de 2,25 euros el kilo.

El dueño de la frutería quiere que, en cualquier circunstancia, el número de kilos de sandía negra con pepitas vendidos sea un tercio del total de kilos de sandías sin pepitas y sandías rayadas.

- 1.a)** (1,25 puntos) El frutero considera que para poder pagar el alquiler y obtener beneficio, debe recaudar de la venta 5400 euros cualquier semana de la campaña. Si se venden todas las sandías almacenadas para la semana, ¿cuántos kilos debería vender de cada variedad para recaudar exactamente ese importe?
- 1.b)** (1,25 puntos) Con la idea de simplificar el etiquetado, el frutero necesita saber si es posible poner el mismo precio a todas las variedades de sandías y seguir recaudando 5400 euros a la semana vendiendo los 2700 kilos. Si fuera posible, ¿cuál sería el precio de venta del kilo de sandía?, ¿cuál sería la cantidad de kilos de cada variedad que debería vender?. Justifique si dichas cantidades serían únicas.

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien **2.1** o **2.2**.

Pregunta 2.1

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x - 1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x + a}{x + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}$$

2.1.a) (1 punto) Determine el valor del parámetro real a para que la función sea continua en $x = 0$.

2.1.b) (1,5 puntos) Calcule las asíntotas de $f(x)$.

Pregunta 2.2

Se considera la función real de variable real dada por la siguiente expresión: $f(x) = e^x(-x^2 + 3)$.

2.2.a) (1,25 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y clasifique, si procede, sus extremos relativos.

2.2.b) (1,25 puntos) Halle el valor de la integral definida

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{xe^x} dx$$

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien **3.1** o **3.2**.

Para poder participar en el concurso “Mejor Jabón Artesano del año” es necesario pasar un control de calidad muy exigente.

Pregunta 3.1

Un maestro jabonero sabe que el 90 % de sus pastillas de jabón hechas a mano pasarían sin problemas este control de calidad.

3.1.a) (1 punto) La empresa organizadora del concurso elegirá en el taller de cada participante una muestra aleatoria simple de pastillas de jabón para obtener una estimación de la proporción de ellas que superan el control de calidad. Suponiendo cierta la creencia del maestro jabonero sobre la calidad de sus pastillas, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de pastillas de jabón que la empresa organizadora debe tomar en el taller de este artesano para garantizar, con un nivel de confianza del 95 %, que el margen de error en la estimación sea inferior al 5 %.

3.1.b) (1,5 puntos) Si finalmente la organización decide seleccionar una muestra aleatoria simple de 140 pastillas de jabón de este artesano, calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos 120 pastillas de jabón superen el control de calidad.

Pregunta 3.2

El peso de las pastillas de jabón de este artesano se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ gramos y desviación típica 30 gramos.

3.2.a) (1,25 puntos) La empresa organizadora del concurso seleccionó 140 pastillas de jabón de este artesano y obtuvo que el peso total fue de 17500 gramos. Obtenga un intervalo de confianza del 99 % para estimar el peso medio μ de las pastillas de jabón de este artesano.

3.2.b) (1,25 puntos) Si el verdadero valor de μ fuera igual a 100 gramos, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de 64 pastillas de jabón de una muestra aleatoria simple fuera superior a 110 gramos?

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien **4.1** o **4.2**.

Pregunta 4.1

En un concesionario el 50 % de sus ventas son de automóviles microhíbridos, el 35 % híbridos y el resto eléctricos enchufables. El acabado más alto de gama se vende en el 80 % de los eléctricos enchufables, el 60 % de los híbridos y el 45 % de los microhíbridos. Se selecciona una operación de venta al azar.

4.1.a) (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que el coche vendido en esa operación no tenga el acabado más alto de la gama.

4.1.b) (1,25 puntos) Si el coche correspondiente a la operación de venta seleccionada tiene el acabado más alto de la gama, determine la probabilidad de que sea eléctrico enchufable.

Pregunta 4.2

De tres sucesos A , B y C se sabe que A y C son sucesos disjuntos, A y B son independientes y se tienen las siguientes probabilidades: $P(A) = 0,25$, $P(B) = 0,2$ y $P(B \cap C) = 0,05$.

4.2.a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que ocurra al menos uno de los sucesos A o B .

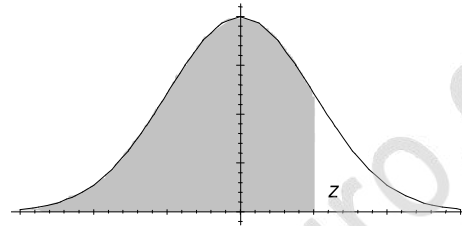
4.2.b) (1 punto) Calcule $P(\overline{B} \cup \overline{C})$.

4.2.c) (0,5 puntos) ¿Pueden ser independientes los sucesos A y C ?

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

- 1.a) Denotamos por x = kilos vendidos de sandía rayada, y = kilos vendidos de sandía negra con pepitas y z = kilos vendidos de sandía negra sin pepitas.

$$\begin{cases} x + y + z = 2700 \\ x - 3y + z = 0 \\ 1,25x + 2,25y + 2,75z = 5400 \end{cases}$$

Resolviendo por Gauss,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2700 \\ 1 & -3 & 1 & | & 0 \\ 1,25 & 2,25 & 2,75 & | & 5400 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2-f_1; f_3-1,25f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2700 \\ 0 & -4 & 0 & | & -2700 \\ 0 & 1 & 1,5 & | & 2025 \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_2/4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2700 \\ 0 & 1 & 0 & | & 675 \\ 0 & 1 & 1,5 & | & 2025 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3-f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2700 \\ 0 & 1 & 0 & | & 675 \\ 0 & 0 & 1,5 & | & 1350 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3/1,5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2700 \\ 0 & 1 & 0 & | & 675 \\ 0 & 0 & 1 & | & 900 \end{pmatrix}$$

Por tanto, para recaudar 5400 euros una semana, se tendrán que vender 900 kilos de sandía negra sin pepitas, 675 kilos de sandía negra con pepitas y 1125 kilos de sandía rayada.

1.b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2700 \\ 1 & -3 & 1 & | & 0 \\ a & a & a & | & 5400 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2-f_1; f_3-af_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2700 \\ 0 & -4 & 0 & | & -2700 \\ 0 & 0 & 0 & | & 5400-2700a \end{pmatrix} \xrightarrow{-f_2/4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2700 \\ 0 & 1 & 0 & | & 675 \\ 0 & 0 & 0 & | & 5400-2700a \end{pmatrix}$$

Para que el sistema tenga solución es necesario que $a = 2$. Así, si el frutero quiere recaudar 5400 euros y que todas las variedades tengan el mismo precio, debería vender el kilo de cualquier variedades a 2 euros.

En estas condiciones, tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2700 \\ 0 & 1 & 0 & | & 675 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 675, \quad x = 2025 - z$$

Por tanto, la solución no es única. Se venderían 675 kilos de sandía negra con pepitas y entre las sandía rayada y la negra sin pepitas un total 2025 kilos.

EJERCICIO 2

Pregunta 2.1

- 2.1.a) La función será continua en $x = 0$ si y solo si $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$

$$\begin{aligned} f(0) &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= a \Rightarrow a = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= -1 \end{aligned}$$

- 2.1.b) Puesto que el dominio de f son todos los reales, no tiene asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + a}{x - 1} = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 1 \text{ es una asíntota horizontal en el infinito}$$

Estudiamos si existe asíntota oblicua en el menos infinito: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x} = 1; \quad n = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{x - 1} = 1$$

Obtenemos que $y = x + 1$ es una asíntota oblicua en el menos infinito.

Pregunta 2.2

2.2.a) El dominio de la función es $\mathbb{R}$ y la función es continua y derivable en todo su dominio

$$f'(x) = e^x(-x^2 + 3 - 2x) = 0 \iff x = -3, x = 1$$

Por tanto, tenemos que:

- En $(-\infty, -3)$ y $(1, \infty)$ la función f es decreciente.
- En $(-3, 1)$ la función f es creciente

La función tiene un máximo relativo en $(1, 2e)$ y un mínimo relativo en $(-3, -6e^{-3})$

2.2.b)

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{xe^x} dx = \int_1^2 \frac{-x^2 + 3}{x} dx = \left(\frac{-x^2}{2} + 3 \ln |x| \right) \Big|_1^2 = \frac{-3}{2} + 3 \ln 2 = 0,5794$$

EJERCICIO 3

Pregunta 3.1

Una pastilla de jabón de este artesano pasaría el control de calidad del concurso con una probabilidad de 0,90.

3.1.a) Con confianza del 95 % , $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} < 0,05 \Rightarrow n > \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot p \cdot q}{0,05^2} = \frac{1,96^2 \cdot 0,90 \cdot 0,10}{0,05^2} = 138,2976$$

Por tanto, como mínimo habría que seleccionar 139 pastillas de jabón en la muestra.

3.1.b) Definimos la variable aleatoria X = "número de pastillas de jabón que superan el control de calidad entre las 140 seleccionadas", $X \sim B(n = 140; p = 0,90)$. Puesto que $n = 140 > 30$, $np = 126 > 5$, $nq = 14 > 5$ y $npq = 12,6$ podemos aproximar X por una distribución normal Y de media $\mu = np = 126$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} \approx 3,55$, $Y \sim N(126; 3,55)$.

La probabilidad pedida es $P(X \geq 120)$. Aproximando X por la distribución normal Y , utilizando la corrección de Yates y tipificando, se obtiene:

$$P(X \geq 120) \approx P\left(Z \geq \frac{119,5 - 126}{3,55}\right) = P(Z \geq -1,83) = 0,9664$$

Pregunta 3.2

Puesto que se trata de una distribución normal con desviación típica conocida; $X \sim N(\mu, 30)$

3.2.a) Tenemos que $1 - \alpha = 0,99 \implies \frac{\alpha}{2} = 0,005$. Por tanto, $z_{\alpha/2} = 2,575$. El intervalo de confianza para la estimación de la media viene dado por la expresión:

$$I = \left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(\frac{17500}{140} - 2,575 \frac{30}{\sqrt{140}} ; \frac{17500}{140} + 2,575 \frac{30}{\sqrt{140}} \right) = \left(125 - \frac{77,25}{\sqrt{140}} ; 125 + \frac{77,25}{\sqrt{140}} \right) = (125 - 6,5288; 125 + 6,5288) = (118,47; 131,5288)$$

3.2.b) Como $X \sim N(100, 30)$ y $n = 64 \implies \bar{X} \sim N(100, 30/8)$

$$P(\bar{X} > 110) = P\left(Z > \frac{110 - 100}{\sqrt{30/8}}\right) = P(Z > 10/3,75) = 1 - P(Z \leq 10/3,75) = 1 - 0,9962 = 0,0038.$$