A.1. (2 puntos) Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A es invertible.

b) Calcule A^{-1} para $a = 1$.

$$|A| = -2 + a^2 - 2a = 0$$

$$a^2 - 2a - 2 = 0$$

$$a = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

La matriz tendrá inversa sí

$$a \neq 1 \pm \sqrt{3}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Adjunta traspuesta:

$$Adj(A)^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Determinante de la matriz:

$$det(A) = -3$$

Inversa de A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

A.2. (2 puntos) El dueño de una empresa que organiza fiestas infantiles quiere hacer chocolate con leche y dispone para la mezcla de 30 litros de leche y 20 litros de chocolate líquido. Por cada litro de chocolate debe echar como máximo 3 litros de leche, y por cada litro de leche debe echar como máximo 1,6 litros de chocolate. Además, solo dispone de botellas para envasar 45 litros de chocolate con leche. Por cada litro de leche de la mezcla puede obtener un beneficio de 1€ y por cada litro de chocolate un beneficio de 2€. Determine cuántos litros de leche y de chocolate líquido debe mezclar para obtener el máximo beneficio y calcule el beneficio que se obtiene.

Max z=2c+l

$c \leq 20$

$l \leq 30$

$l \leq 3c$

$c \leq 1{,}6l$

$c + l \leq 45$

$c \geq 0$

$l \geq 0$

Colocando

Max z=2c+l

$c \leq 20$

$l \leq 30$

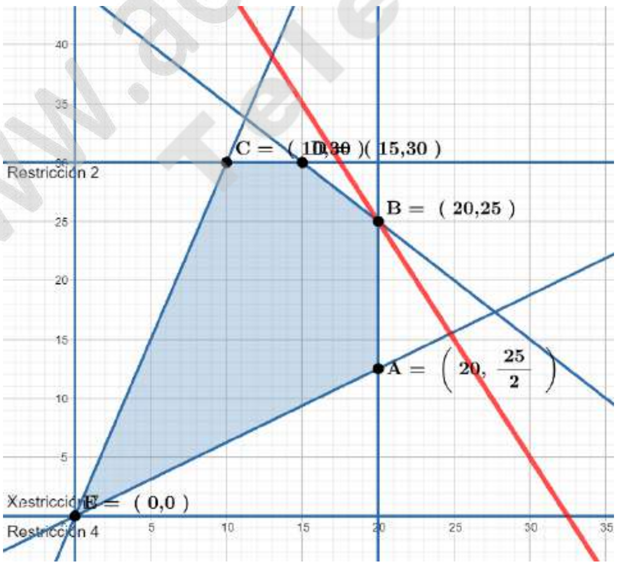
$-3c + l \leq 0$

$c - 1{,}6l \leq 0$

$c + l \leq 45$

$c \geq 0$

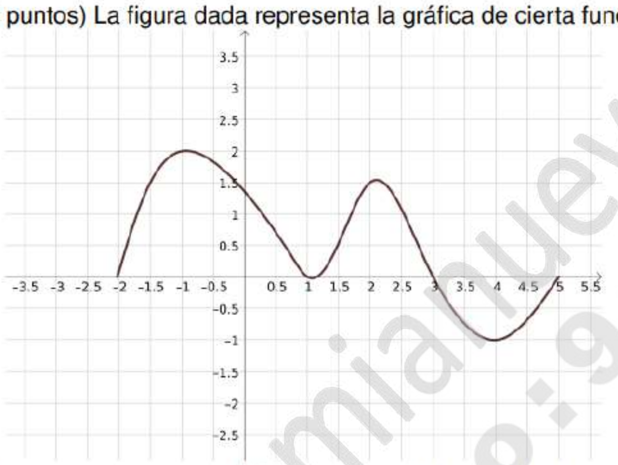
$l \geq 0$



Punto	Coordenadas (X_1,X_2)	Valor de la Función Objetivo $2X_1+X_2$
A	(20,25/2)	2(20)+ (25/2) = 105/2
B	(20,25)	2(20)+ (25) = 65
C	(10,30)	2(10)+ (30) = 50
D	(15,30)	2(15)+ (30) = 60
E	(0,0)	2(0)+ (0) = 0

Mezclaremos 20 L de chocolate y 25 L de leche obteniendo un beneficio de 65€

A.3. (2 puntos) La figura dada representa la gráfica de cierta función f.



La gráfica representada tiene tangentes horizontales en $x=-1, x=1, x=2$ y $x=4$.

a) Determine razonadamente los intervalos en los que $f'(x)>0$.

b) Determine razonadamente cuál es el signo de

$$\int_{-2}^{5} f(x)\,dx.$$

a)

La derivada es positiva cuando la función es creciente

$$(-2,-1)\cup(1,2)\cup(4,5)$$

b) El signo será positivo ya que el área encerrada por encima del eje de las x es superior al área encerrada por debajo del eje de las x.

A.4. (2 puntos) Sean A y B sucesos asociados a un experimento aleatorio tales que $P(A)=0{,}6$, $P(A|B)=0{,}4$ y $P(A|B^c)=0{,}8$; siendo B^c es el suceso complementario de B.

a) Calcule $P(B)$.

b) ¿Son A y B independientes? Justifique su respuesta.

$$P\left({}^{A}/_{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{PB}$$

$$P\left({}^{A}/_{B^c}\right) = \frac{P(A \cap B^c)}{PB^c}$$

$$0{,}4 = \frac{P(A \cap B)}{PB}$$

$$0{,}8 = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - PB}$$

$$0{,}4 = \frac{P(A \cap B)}{PB}$$

$$0{,}8 = \frac{0{,}6 - P(A \cap B)}{1 - PB}$$

$$P(A \cap B) = 0{,}4PB$$

$$0{,}8 = \frac{0{,}6 - 0{,}4PB}{1 - PB}$$

$$0{,}8(1 - PB) = 0{,}6 - 0{,}4PB$$

$$0{,}8 - 0{,}8PB = 0{,}6 - 0{,}4PB$$

$$0{,}2 = 0{,}4PB$$

$$PB = 0{,}5$$

$$P(A \cap B) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}2$$

No son independientes

$$P(A \cap B) = 0{,}2 \neq PA \cdot PB = 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}3$$

A.5. (2 puntos) Una cementera rellena sacos de cemento cuyo peso en kilogramos se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 2 kg.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es 50 kg. Determine un intervalo de confianza del 99 % para el peso medio de un saco de cemento.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 kilogramo, con un nivel de confianza del 90 %.

$$I.C = \left(\overline{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Calculamos el valor crítico para el nivel de confianza del 99%:

$$1 - \alpha = 0{,}99 \Rightarrow \alpha = 0{,}01 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}01}{2} = 0{,}005 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}995$$

Y buscamos ahora en la tabla el valor de z que deja a la izquierda una probabilidad de 0’995,

obteniendo $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ =2,58

$$\left(50-2{,}58\cdot\frac{2}{\sqrt{20}},50+2{,}58\cdot\frac{2}{\sqrt{20}}\right)$$

$$(50-1{,}1538;50+1{,}1538)$$

$$(48{,}85;51{,}1538)$$

b)

$$E=Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Rightarrow E=\frac{Z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{\sqrt{n}}\Rightarrow\sqrt{n}=\frac{Z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\Rightarrow(\sqrt{n})^2=\left(\frac{Z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2$$

$$\boxed{n=\left(\frac{Z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2}$$

Calculamos el valor crítico para el nivel de confianza del 90%:

$$1-\alpha=0{,}90\Rightarrow\alpha=0{,}10\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0{,}05\Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0{,}95$$

Y buscamos ahora en la tabla el valor de z que deja a la izquierda una probabilidad de 0’95,

obteniendo: $Z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}645$

$$n=\left(\frac{1{,}645\cdot 2}{1}\right)^2=10{,}8241\rightarrow n=11$$

B.1. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a\in\mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{rcl}x+ay+z&=&a\\ax-y-az&=&0\\x+y+z&=&1\end{array}\right\}$$

a) Discuta la compatibilidad del sistema para los diferentes valores de a.
b) Resuelva el sistema para $a=2$.

a)

$$A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&-1&-a\\1&1&1\end{pmatrix}\quad A^*=\begin{pmatrix}1&a&1&a\\a&-1&-a&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$|A|=-1-a^2+a+1-a^2+a=-2a^2+2a=0$$

$$a\cdot(-2a+2)=0$$

a=0

a=1

$$Si\ a \neq 0\ y\ a \neq 1\ RA = RA^* = 3\ Sistema\ compatible\ determinado$$

Si a=0

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\ A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0\ RA = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0\ RA^* = 3$$

para a=0 sistema incompatible

Si a=1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\ A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 RA = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 + 1 - 1 = 0$$

Todos los determinantes de 3 por 3 de la amplia dan cero

$$RA^* = 2$$

Para a = 1 sistema compatible indeterminado

b)

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 2 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right\}$$

El determinante de la matriz de coeficientes es

$$|A| = -4 \neq 0$$

Por tanto, podemos aplicar Cramer.

Calculamos x:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} =$$

$$= \frac{-1}{-4} =$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} =$$

$$= \frac{-4}{-4} =$$

$$= 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} =$$

$$= \frac{1}{-4} =$$

$$= \frac{-1}{4}$$

B.2. (2 puntos) Considere la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}.$$

a) Determine sus asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).
b) Calcule $f'(x)$ y halle el valor de $f'(2)$.

a)

AV posible asíntota verticalx-1=0; x=1

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-x+1}{x-1}=-\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-x+1}{x-1}=+\infty$$

Av x=1

Asíntota horizontal

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x-1}=+\infty$$

No tiene asíntota horizontal

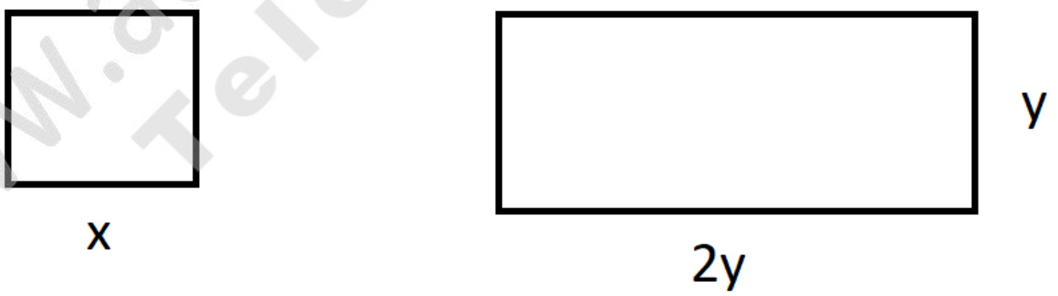
asíntota oblicua

$$y=mx+n$$
$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x-1}:x \Longrightarrow m=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2-x}\Rightarrow m=1$$
$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x\cdot(x-1)}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x^2+x}{x-1}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)=1$$
$$n=1$$

y=x+1

$$f'(x)=\frac{(2x-1)\cdot(x-1)-1\cdot(x^2-x+1)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x+1-x^2+x-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

B.3. (2 puntos) Un escultor quiere dividir un alambre muy fino en dos trozos que se utilizarán para delimitar, respectivamente, un cuadrado y un rectángulo cuya base debe medir el doble que su altura. Posteriormente, se fabricarán ambas figuras planas con un material que cuesta 16 céntimos de euro/cm^2 para el cuadrado y 10 céntimos de euro/cm^2 para el rectángulo. Si el alambre inicial mide 450 cm, determine la función de coste total de ambas figuras. Obtenga la longitud de cada trozo de alambre para que el coste total de estas piezas sea mínimo.
Sugerencia: Exprese el coste total en función de la altura del rectángulo y utilice 3 cifras decimales para realizar los cálculos.



La suma de los perímetros es 450

4x+2y +4y=450

4x+6y=450

Simplificando

2x+3y=225

El coste lo obtenemos multiplicando el precio del centímetro cuadrado por el área

Min $z=0{,}16x^2+0{,}1\cdot 2\cdot y^2$

Min $z=0{,}16x^2+0{,}2\cdot y^2$

sa

2x+3y=225

Despejando x y sustituyendo

$$x=\frac{225-3y}{2}=112{,}5-1{,}5y$$

$\text{Minz}=0{,}16(112{,}5-1{,}5y)^2+0{,}2\cdot y^2$

$$z'=0{,}32(112{,}5-1{,}5y)(-1{,}5)+0{,}4y=0$$

$$-54+0{,}72y+0{,}4y=0$$

$$1{,}12y=54$$

Y=48,21 cm

X=$112{,}5-1{,}5\cdot 48{,}21=50{,}18cm$

El cuadrado será de 50,18cm de lado y el rectángulo de 48,21 de alto y 96,42 de ancho.

B.4. (2 puntos) Una carta escogida al azar es eliminada (sin ser vista) de un mazo de 52 cartas de póker, en el que hay 13 cartas de cada palo (diamantes, corazones, picas y tréboles). Una vez eliminada, se escoge al azar una carta, entre las que quedan en el mazo, y esta segunda carta es observada.

a) Calcule la probabilidad de que la carta observada sea de diamantes.

b) Si la carta observada no es diamantes, calcule la probabilidad de que la carta eliminada tampoco lo haya sido.

$PD_1=13/52$

$P(D_2/D_1)=12/51$

$P(\overline{D_1})=39/52$

$P\left({D_2}/{\overline{D_1}}\right)=13/51$

$PD_2=\frac{13}{52}\cdot\frac{12}{51}+\frac{39}{52}\cdot\frac{13}{51}=0{,}0588+0{,}1912=0{,}25$

b)

$$P\left({\overline{D_1}}/{\overline{D_2}}\right)=\frac{P(\overline{D_1}\cap\overline{D_2})}{P\overline{D_2}}=\frac{\frac{39}{52}\cdot\frac{38}{51}}{1-0{,}25}=0{,}75$$

B.5. (2 puntos) Considere una población donde observamos una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica σ. Sea $\overline{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño 10.

a) Determine el valor de σ sabiendo que $I = (58{,}2; 73{,}8)$ es un intervalo de confianza del $95\,\%$ para μ.

b) Si $\sigma = 20$, calcule $P(-10 < \overline{X} - \mu < 10)$.

$$\left(\overline{x} - Z\alpha/_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z\alpha/_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Calculamos el valor crítico para el nivel de confianza del 99%:

$$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$$

Y buscamos ahora en la tabla el valor de z que deja a la izquierda una probabilidad de 0'975,

obteniendo $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ =1,96

$$\overline{x} + Z\alpha/_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 73{,}8$$

$$\overline{x} - Z\alpha/_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 58{,}2$$

$$\overline{x} + 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}} = 73{,}8$$

$$\overline{x} - 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{10}} = 58{,}2$$

Resolviendo el sistema:

$$\overline{x} = 66$$

$$\sigma = 12{,}58$$

b)

$$\overline{\boldsymbol{x}} \sim \boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{\mu}, \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}\right) = \overline{\boldsymbol{x}} \sim \boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{\mu}, \frac{\mathbf{20}}{\sqrt{\mathbf{10}}}\right) = \overline{\boldsymbol{x}} \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu}, 6{,}32)$$

b)

$$\begin{aligned} P(-10 < \bar{X} - \mu < 10) &= P(-10 + \mu < \bar{X} - \mu + \mu < 10 + \mu) = P(-10 + \mu < \bar{X} < 10 + \mu) \\ &= P\left(\frac{-10 + \mu - \mu}{6{,}32} < z < \frac{10 + \mu - \mu}{6{,}32}\right) == P(-1{,}58 < z < 1{,}58) \\ &= P(z < 1{,}58) - P(z < -1{,}58) = 0.9429 - (1 - 0.9429) = 0{,}8858 \end{aligned}$$

-