A. 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros reales a y b para los que $A = A^{-1}$.
b) Para $a = b = 2$, calcule la matriz inversa de A.

a) Si la matriz A es igual su inversa al multiplicarlas debería dar la matriz identidad

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+1 & 0 & 2a \\ 0 & b^2 & 0 \\ 2a & 0 & 1+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a^2 + 1 = 1 \rightarrow a = 0$$

Sustituyendo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b^2 = 1 \rightarrow b = \pm 1$$

b)

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Adj(A)^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = 6$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

A. 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3+4}{x^2-1}$$

a) Determine el dominio de $f(x)$ y calcule sus asíntotas.
b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Los valores del denominador no pueden valer cero.

$$x^2-1=0 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$$

Dominio: $R-\{\pm 1\}$

Asíntotas verticales:

X=1

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3+4}{x^2-1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3+4}{x^2-1}=-\infty$$

X=-1

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x^3+4}{x^2-1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^3+4}{x^2-1}=-\infty$$

Asíntotas verticales x=1 x=-1

Asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x^3+4}{x^2-1}=\infty$$

No tiene

Asíntota oblicua:

y=mx+n

m=$\lim_{x\to\infty} f(x):x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^2-1}:x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3-x}=1$

n=$\lim_{x\to\infty} f(x)-mx=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^2-1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^2-1}-\frac{x^3+x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-x}{x^2-1}=0$

y=x

b) f´(x)=$\frac{3x^2\cdot(x^2-1)-2x\cdot(x^3+4)}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4-8x}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2-8x}{(x^2-1)^2}=$

f´(0)=0

f(0)=$\frac{0^3+4}{0^2-1}$=-4

La ecuación de la recta tangente es

$$y-f(0)=f´(0)(x-0)$$

$$y-(-4)=0\cdot(x-0)$$

Y=-4

A. 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-ax & \text{si } x\le 1 \\ \ln x & \text{si } x>1 \end{cases}$$

denotando por ln la función logaritmo neperiano.

a) Determine para qué valores de $a\in\mathbb{R}$ la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.
b) Para $a=1$, halle el área de la región acotada delimitada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=-1$, $x=0$.

a)

Si x<1

La función es continua por ser un polinomio.

Si x>1 la función es continua por ser suma de 2 funciones continuas pues el logaritmo es continuo si x es mayor que cero.

estudiamos la continuidad en x = 1

$$\lim_{x\to 1^+} lnx = ln1 = 0$$

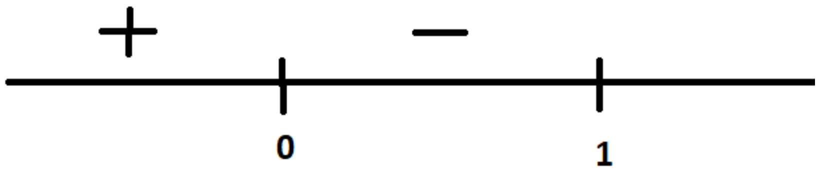
$$\lim_{x\to 1^-} x^2-ax = 1^2-a\cdot 1 = 1-a$$

$$f(1)=1^2-a\cdot 1=1-a$$

1-a=0

a=1

a) x^2-x=0
x·(x-1)=0
x=0
x=1



$$\int_{-1}^{0}(x^2-x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big[_{-1}^{0} = \frac{0^3}{3}-\frac{0^2}{2}-\left(\frac{(-1)^3}{3}-\frac{(-1)^2}{2}\right) = +\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}u^2$$

A. 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
El 60 % de los empleados de una multinacional teletrabaja desde que se declaró la situación de emergencia sanitaria por Covid-19. De estos, el 30 % padece trastornos del sueño, mientras que este porcentaje se eleva al 80 % para aquellos empleados que no teletrabajan. Seleccionado un empleado al azar, calcule la probabilidad de que:

a) No tenga trastornos del sueño y teletrabaje.
b) No teletrabaje, sabiendo que no tiene trastornos del sueño.

a)

$PT = 0'6$ — $PS/T = 0,3$
$P\bar{S}/T = 0,7$

$P\bar{T} = 0'4$ — $P(S/\bar{T}) = 0,8$
$P(\bar{S}/\bar{T}) = 0,2$

$$P(S\cap T) = 0,6\cdot 0,7 = 0,42$$

b) $P(\bar{T}/S) = \frac{p(\bar{T}\cap S)}{pS} = \frac{0,4\cdot 0,2}{0,6\cdot 0,7+0,4\cdot 0,2} = \frac{0,08}{0,42+0,08} = 0,16$

A. 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se quiere evaluar el uso de las redes sociales por parte de los menores de 14 años.

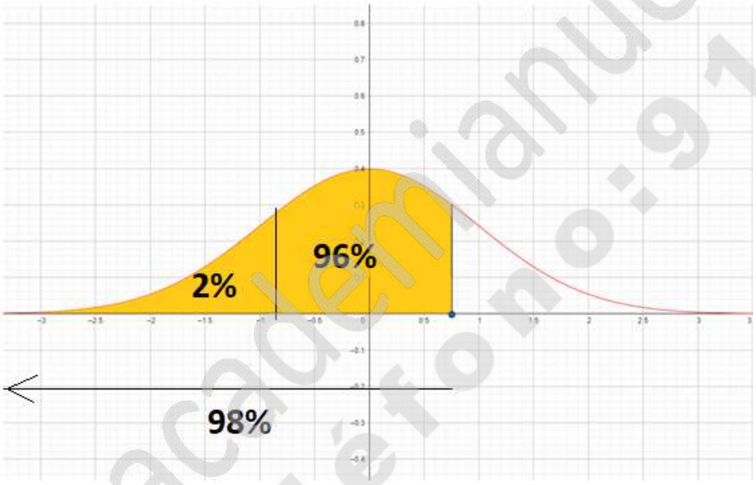
a) Se toma una muestra de 500 menores de 14 años, de los cuales 320 tienen cuenta en alguna red social. Calcule el intervalo de confianza al 96 % para estimar la proporción de menores de 14 años que tienen cuenta en alguna red social.
b) Suponiendo que la proporción poblacional es $P = 0,5$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de menores de 14 años para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 5 %.

$$I.C. = \left(\mathrm{p} - Z\alpha_{/2} \cdot \sqrt{\frac{\mathrm{p}\cdot \mathrm{q}}{n}} ; \hat{p} + Z\alpha_{/2} \cdot \sqrt{\frac{\mathrm{p}\cdot \mathrm{q}}{n}}\right)$$

p=320/500=0,64

q=1-0,64=0,36

n=500



Buscando en la tabla 0,98

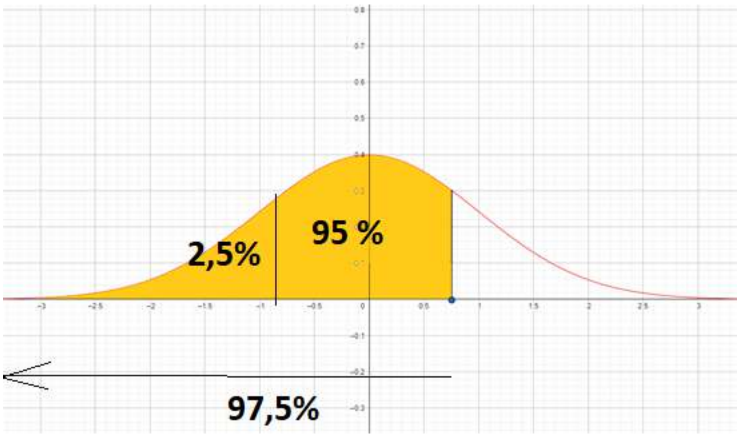
$z\propto_{/2}$=2,055

$$I.C. = \left(0,64 - 2,055 \cdot \sqrt{\frac{0,64 \cdot 0,36}{500}} ; 0,64 + 2,055 \cdot \sqrt{\frac{0,64 \cdot 0,36}{500}}\right)$$

$$I.C. = (0,64 - 0,044; 0,64 + 0,044)$$

$$I.C. = (0,596; 0,684)$$

b)



Buscando en la tabla 0,975

$z_{\alpha/2}$=1,96

$$E = Z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \Rightarrow 0,05 = 1,96 \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} \Rightarrow 0,0255 = \sqrt{\frac{0,25}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,00065025 = \frac{0,25}{n} \Rightarrow n = \frac{0,25}{0,00065025} \Rightarrow n = 384,47 \rightarrow n = 385 \; menores.$$

B. 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ x - y + a^2 z = 3 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.
b) Resuelva el sistema para $a = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2a^2 + 1 - (2 + 1 - a^2) = 3a^2 - 3 = 0$$

$$a = \pm 1$$

Si $a \neq \pm 1 \; RA = RA^{*} = 3 = n \; SCD$

Si a=1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 -1 \\ 1 & -1 & 1 \;\; 3 \\ 2 & -1 & 1 \;\; 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

RA=2

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 - 1 - (-2 - 4 + 3) = -3 + 3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 6 + 1 - (2 + 4 - 3) = 3 - 3 = 0$$

Todos los determinantes de tamaño tres de la ampliada valen cero por lo que el rango de la ampliada vale tres.

Si a=1 RA=RA*=2$\neq n$Sistema compatible indeterminado.

Si a=-1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 -1 \\ 1 & -1 & 1 \;\; 3 \\ 2 & -1 & 1 \;\; 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

RA=2

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 - 1 - (-2 - 4 + 3) = -3 + 3 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -4+6+1-(2+4-3) = 3-3 = 0$$

Todos los determinantes de tamaño tres de la ampliada valen cero por lo que el rango de la ampliada vale tres.

Si a=-1 RA=RA*=2$\neq n$Sistema compatible indeterminado.

b) Resolvemos para a=1
El sistema quedaría:
x+y-z=-1
x-y+z=3
2x-y+z=4

z=t

x+y=-1+t

x-y=3-t

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1+t & 1 \\ 3-t & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1-t-3+t}{-1-1} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1+t \\ 1 & 3-t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3-t+1-t}{-1-1} = \frac{4-2t}{-2} = -2+t$$

$$z = t$$

B. 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Un almacén de frutos secos tiene un saco de 50 kg de almendras y otro de 25 kg de avellanas. Quiere mezclarlos para preparar bolsas mixtas para su venta. La cantidad de almendras de la mezcla ha de ser como mínimo 1,5 veces la cantidad de avellanas. Además, para que le sea rentable la preparación, deberá vender al menos 60 kg entre ambos tipos de frutos secos. Por otra parte, no puede vender más de 70 kg entre ambos. Represente la región factible. Calcule la cantidad de cada fruto seco que ha de contener la mezcla para obtener el máximo beneficio si un kg de almendras le deja un beneficio de 1 € y un kg de avellanas de 2 €, y obtenga el beneficio que se obtiene con la venta de esta mezcla.

Sea x la cantidad de almendras e y la cantidad de avellanas.

Maximizar F

Maximizar z=x+2y

$$x + y \geq 60$$

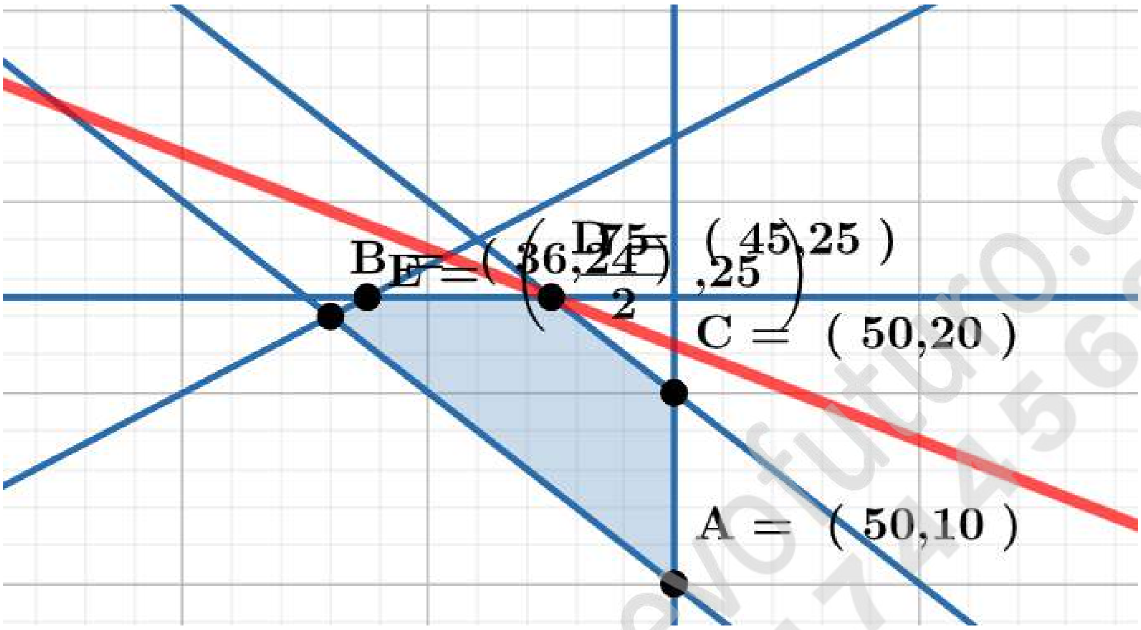
$$x + y \leq 70$$

$$x \leq 50$$

$$y \leq 25$$

$$x \geq 1{,}5y$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$



Resolvemos los sistemas para calcular las esquinas de la región factible:

x+y=60

x=1,5y

1,5y+y=60

2,5y=60; y=60/2,5=24

X=36

Punto B (36,24)

X+y=60

X=50

Punto A (50,10)

X+y=70

X=50

Y=70-50=20

Punto C (50,20)

X+y=70

Y=25

X=70-25=45

Punto D (45,25)

Y=25

X=1,5y

X=1,5·25=75/2

Punto E (75/2;25)

Punto	Coordenadas (X_1,X_2)	Valor de la Función Objetivo X_1+2X_2
A	(50,10)	(50)+ 2(10) = 70
B	(36,24)	(36)+ 2(24) = 84
C	(50,20)	(50)+ 2(20) = 90
D	(45,25)	(45)+ 2(25) = 95
E	(75/2,25)	(75/2)+ 2(25) = 175/2

B. 3.(Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real, definida $f(x) = (x^2-3)e^x$.

a) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y determine sus extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.
b) Calcule

$$\int_1^2 e^{-x} f(x)\,dx$$

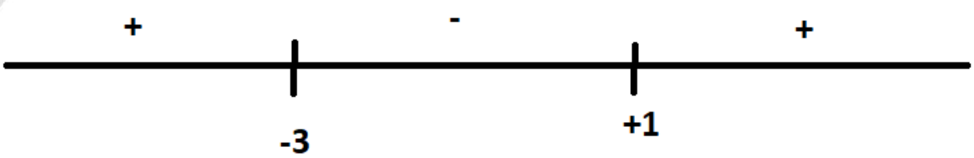
a) $f'(x)=2xe^x+(x^2-3)e^x=e^x(2x+x^2-3)=e^x(x^2+2x-3)=0$

$x^2+2x-3=0$; x=1, x=-3 posible máximo o mínimo

$f'(-4)>0$

$f'(0)<0$

$f'(2)>0$



$(-\infty,-3)\cup(1,\infty)$ *Creciente*

$(-3,1)$ Decreciente

$f(1)=(1^2-3)e^1= -2\,e$

$f(-3)=((-3)^2-3)e^{-3}=6e^{-3}$

Máximo $(-3,\ 6e^{-3})$

Mínimo $(1,\ -2\,e)$

definida $f(x) = (x^2 - 3)e^x$.

crecimiento de $f(x)$ y determ

$$\int_1^2 e^{-x} f(x)\, dx$$

$$\int_1^2 e^{-x} f(x)dx = \int_1^2 e^{-x}(x^2-3)e^x dx = \int_1^2 (x^2-3)dx = \frac{x^3}{3} - 3x\Big[_1^2$$
$$= \frac{2^3}{3} - 3\cdot 2 - \left(\frac{1^3}{3} - 3\cdot 1\right) = \frac{8}{3} - 6 - \frac{1}{3} + 3 = \frac{7}{3} - 3 = \frac{7}{3} - \frac{9}{3} = -\frac{2}{3}$$

B. 4. Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = 0,5 \quad P(\overline{B}|A) = 0,4 \quad P(A \cup B) = 0,9$$

a) Calcule $P(B|\overline{A})$

b) Determine si son dependientes o independientes los sucesos A y B. Justifique la respuesta.

$$P(\overline{B}/A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{PA}$$

$$0,4 = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{0,5}$$

$$P(\overline{B} \cap A) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2 = PA - P(A \cap B)$$

$$0,2 = 0,5 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0,3$$

$$P(A \cup B) = PA + PB - P(A \cap B)$$

$$0,9 = 0,5 + PB - 0,3$$

$$PB = 0,7$$

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P\bar{A}} = \frac{PB - P(A \cap B)}{1 - PA} = \frac{0,7 - 0,3}{1 - 0,5} = \frac{0,4}{0,5} = 0,8$$

$$P(A \cap B) \neq PA \cdot PB$$

$$0{,}3 \neq 0{,}5 \cdot 0{,}7$$

A y B no son sucesos independientes.

B. 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El consumo diario de pan de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 20 gramos.
a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 36. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ no supere los 125 gramos si $\mu = 120$ gramos.
b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 81 estudiantes de secundaria se ha obtenido el intervalo de confianza (117,3444; 124,6556) para μ, determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

a)

$$\bar{x} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\bar{x} \sim N\left(120; \frac{20}{\sqrt{36}}\right)$$

$$\bar{x} \sim N(120; 3{,}33)$$

$$P(\bar{x} < 125) = P\left(Z < \frac{125 - 120}{3{,}33}\right) = P(Z < 1{,}5) = 0{,}9332$$

b)

$$\left(\overline{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\overline{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 117{,}3444$$

$$\overline{x} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 124{,}6556$$

Restando ambas ecuaciones

$$2 \cdot Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 7{,}3112$$

$$Z_{\alpha/2} \cdot \frac{20}{\sqrt{81}} = \frac{7{,}3112}{2}$$

$$Z_{\alpha/2} \cdot 2{,}22 = 3{,}6556$$

$$Z_{\alpha/2} = 1{,}65$$

P(z<1,65)=0,9505

1-0,9505=0,0495

Nivel de confianza=0,9505-0,0495=0,9