ACADEMIA NUEVO FUTURO
www.academianuevofuturo.com Teléfono: 914744569
C/ Fernando Poo 5 Madrid (Metro Delicias o Embajadores).
YouTube ¡Suscríbete!

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

Curso **2019-2020**

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

A.1. (2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+ay & = & 0 \\ x+2z & = & 0 \\ x+ay+(a+1)z & = & a \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.
b) Resuelva el sistema para $a=0$.

A=$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix}$ A*=$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & a & a+1 & a \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & a+1 \end{vmatrix}$=2a$-a^2-a-2a$ =a$(-a-1)=0$

a=0

a=-1

Si a$\neq 0$ y $a \neq -1$RA=RA*=n SCD

Si a=0

A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ A*=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

El sistema se torna homogéneo

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$RA=RA*=2 SCI

Si a=-1

A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ A*=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ RA=2

www.academianuevofuturo.com Teléfono:914744569

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$RA*=3 SI

b) Para $a=0$, el sistema queda $\left.\begin{matrix} x=0 \\ x+2z=0 \\ x+z=0 \end{matrix}\right\}$

Lo que obliga a x=0 z=0 y =t

A.2. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{4x-x^3}{3x+x^2}+4$$

a) Calcule el dominio de la función y obtenga el valor que hay que asignar a $f(x)$ en $x=0$ para que la función anterior sea continua en este punto.
b) Obtenga las asíntotas de esta función en caso de que existan.

a)

La función no existe cuando el denominador es cero.

$$3x+x^2=0 \Rightarrow x(3+x)=0$$

x=0

x=-3

Dom R-$\{-3{,}0\}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x-x^3}{3x+x^2}+4=\lim_{x\to 0}\frac{x(4-x^2)}{x(3+x)}+4=\lim_{x\to 0}\frac{4-x^2}{3+x}+4=\frac{4}{3}+4=\frac{16}{3}$$

f(0)= $\frac{16}{3}$

b) Asíntotas verticales:

en x=0 no hay asíntotas verticales como vimos en el apartado anterior

en x=-3

$$\lim_{x\to -3^-}\left(\frac{4x-x^3}{3x+x^2}+4\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to -3^+}\left(\frac{4x-x^3}{3x+x^2}+4\right)=-\infty$$

Asíntota horizontal:

www.academianuevofuturo.com Teléfono: 914744569
C/ Fernando Poo 5 Madrid (Metro Delicias o Embajadores).
¡Suscríbete!

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{4x - x^3}{3x + x^2} + 4 = -\infty$$

No hay asíntota horizontal

Asíntota oblicua.

Antes de calcularla simplificamos la expresión:

$\frac{4x-x^3}{3x+x^2} + 4 = \frac{4x-x^3+12x+4x^2}{3x+x^2} = \frac{-x^3+4x^2+16x}{3x+x^2} = \frac{-x^2+4x+16}{3+x}$

y=mx+n

m= $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2+4x+16}{3+x} : x = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2+4x+16}{3x+x^2} = -1$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - m \cdot x) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2 + 4x + 16}{3 + x} + x = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2 + 4x + 16 + 3x + x^2}{3 + x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{+7x + 16}{3 + x} = 7$$

y=-x+7

A.3. (2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x) = -x^4 + x^3 + 2x^2$$

a) Determine la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$.
b) Obtenga el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$ y el eje de abscisas para valores de $x > 0$.

f(-1)= $-(-1)^4 + (-1)^3 + 2(-1)^2 = -1 - 1 + 2 = 0$

$$f'_{(x)} = -4x^3 + 3x^2 + 4x \to f'(-1) = -4(-1)^3 + 3(-1)^2 + 4(-1) = 4 + 3 - 4 = 3$$

y-0=3(x+1)

y=3x+3

b)

realizo el corte con OX

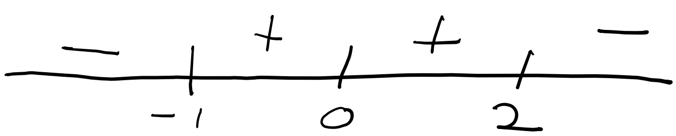
$$x^2(-x^2 + x + 2) = 0$$

x=0

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2}$$

x=-1

x=2



www.academianuevofuturo.com Teléfono: 914744569

A=$\int_0^2(-x^4+x^3+2x^2)\,dx=-\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}\Big|_0^2=-\frac{32}{5}+4+\frac{16}{3}=\frac{44}{15}u^2$

A.4. (2 puntos)
Una asociación de senderismo ha programado tres excursiones para el mismo fin de semana. El 40 % de los socios irá al nacimiento del río Cuervo, el 35 % a las Hoces del río Duratón y el resto al Cañón del río Lobos. La probabilidad de lluvia en cada una de estas zonas se estima en 0,5, 0,6 y 0,45, respectivamente. Elegido un socio al azar:

a) Calcule la probabilidad de que en su excursión no llueva.
b) Si en la excursión realizada por este socio ha llovido, ¿cuál es la probabilidad de que este socio haya ido al nacimiento del río Cuervo?

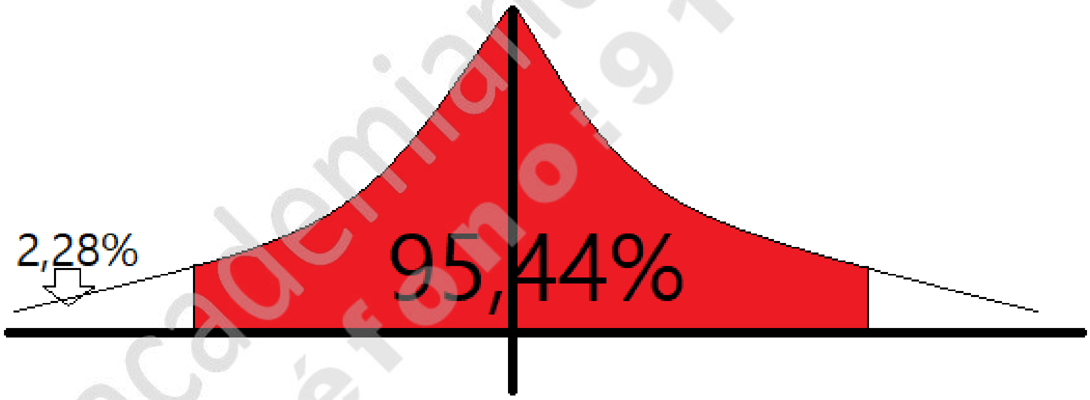
$$p_{Ll}=0{,}4\cdot 0{,}5+0{,}35\cdot 0{,}4+0{,}25\cdot 0{,}55=0{,}4775$$

b) $P\left({}^{C}/_{LL}\right)=\frac{P(C\cap LL)}{PLL}=\frac{0{,}4\cdot 0{,}5}{1-0{,}4775}=0{,}3828$

A.5. (2 puntos)
La publicidad de una marca de bolígrafos afirma que escriben 2 km. Para realizar un control de calidad, se considera que la longitud de escritura de estos bolígrafos puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ km y desviación típica 0,5 km.

a) Obtenga el número mínimo de bolígrafos que deberían seleccionarse en una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral, sea como mucho 0,05 km con un nivel de confianza del 95,44 %.
b) Si la longitud media de escritura, μ, es la anunciada en la publicidad, calcule la probabilidad de que, con una muestra de 16 bolígrafos elegidos al azar, se puedan escribir más de 30 km.

a)



95,44+2,28=97,72% buscando en la tabla $Z_{a/2}$=2,0096

$$N=\left({}^{z_\alpha}/_2\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(2{,}0096\cdot\frac{0{,}5}{0{,}005}\right)^2=400$$

b) $\bar{x}\sim N\left(\mu;\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)\Rightarrow\bar{x}\sim N\left(2;\frac{0{,}5}{\sqrt{16}}\right)\Rightarrow\bar{x}\sim N(2;0{,}125)$

$P\left(\bar{x}>\frac{30}{16}\right)=P(\bar{x}>1{,}875)=P\left(z>\frac{1{,}875-2}{0{,}125}\right)$=P(z>-1)=P(z<1)=0,8413

Opción B

B.1. (2 puntos)
Se considera la matriz A dada por

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcule el valor del parámetro real m para que $A^2 - 5A = -4I$, siendo I la matriz identidad.
b) Para $m = 1$, indique si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11 & m+1 & 10 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 5 & -m-1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 5 & 10 \\ 0 & 5m & 0 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11-15 & 1+m-5 & 10-10 \\ 0 & m^2-5m & 0 \\ 5-5 & -m-1+5 & 6-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & m-4 & 0 \\ 0 & m^2-5m & 0 \\ 0 & 4-m & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} m-4=0 \\ m^2-5m=-4 \\ 4-m=0 \end{array}\right\} m=4$$

La segunda de las ecuaciones tiene dos soluciones de la que sólo es válida m=4.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4 \neq 0$ Si es invertible

$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$(A^t)^{adj} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

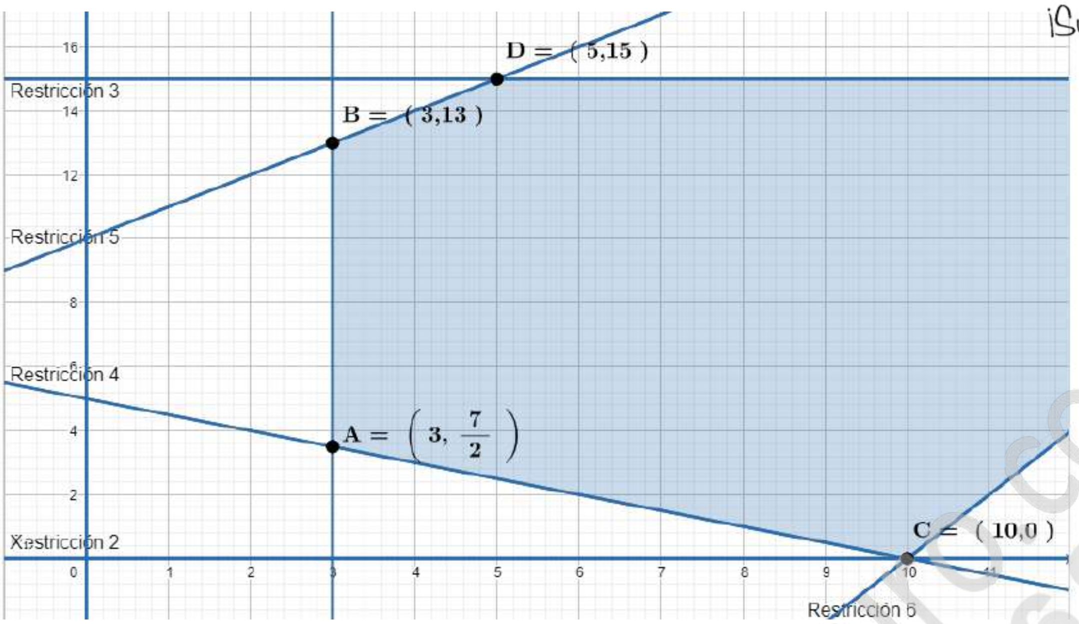
$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

B.2. (2 puntos)
La región del plano S está definida por las siguientes expresiones:

$$x \geq 3, \qquad 0 \leq y \leq 15, \qquad y - 5 + \frac{x}{2} \geq 0, \qquad y - x \leq 10, \qquad y + 20 \geq 2x$$

a) Determine las coordenadas de sus vértices y represente en el plano la región S.
b) Obtenga el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = x + y$ en esta región, indicando los puntos en los cuales se alcanzan estos valores.

ACADEMIA NUEVO FUTURO
www.academianuevofuturo.com Teléfono: 914744569
C/ Fernando Poo 5 Madrid (Metro Delicias o Embajadores).
YouTube ¡Suscríbete!



Para calcular los vértices debemos resolver los sistemas:

$$\left.\begin{array}{l} y=5-\frac{x}{2} \\ y=2x-20 \end{array}\right\} C(10\,,\,0) \qquad \left.\begin{array}{l} y=15 \\ y=2x-20 \end{array}\right\} E\left(\frac{35}{2}\,,15\right) \qquad \left.\begin{array}{l} y=15 \\ y=x+10 \end{array}\right\} D(5\,,15)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=x+10 \end{array}\right\} B(3\,,13) \qquad \left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=5-\frac{x}{2} \end{array}\right\} A\left(3\,,\frac{7}{2}\right)$$

A	(3,7/2)	(3)+(7/2)=13/2
B	(3,13)	(3)+(13)=16
C	(10,0)	(10)+(0)=10
D	(5,15)	(5)+(15)=20
E	(35/2,15)	(35/2)+(15)=65/2

Máximo (35/2,15) con z= 65/2

Mínimo (3,7/2) con z=13/2

www.academianuevofuturo.com Teléfono: 914744569

B.3. (2 puntos)
Se considera la función real de variable real dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = 3(x+k)e^{\frac{-x}{2}}$$

a) Indique el dominio de la función y obtenga razonadamente el valor del parámetro real k para que la tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal. Determine también la ecuación de la recta tangente a la función en dicho punto.
b) Para $k = 1$, señale los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

a) Dominio R al estar formado por la multiplicación de una función polinómica y una exponencial.
Para que tenga tangente horizontal la derivada en ese punto debe valer cero.

$$f'_{(x)} = 3\left[1 \cdot e^{-x/2} + (x+k)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-\frac{x}{2}}\right] = 0$$

Sacando $e^{-x/2}$ factor común y simplificando:

$$e^{-x/2}\left(1 + (x+k)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0$$

$$1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}k = 0$$

Sustituyendo x=1
$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}k = 0$ Resolviendo

$$2 - 1 - k = 0$$

k=1

f(1)=3(1+1) $\cdot\ e^{-1/2}$=6$\cdot\ e^{-1/2}$

y-6$\cdot\ e^{-1/2}$=0·(x-1)

y=6$\cdot\ e^{-1/2}$

b) $f'_{(x)} = 3\left[1 \cdot e^{-x/2} + (x+1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-\frac{x}{2}}\right] = 0$

Sacando $e^{-x/2}$ factor común y simplificando:

$$e^{-x/2}\left(1 + (x+1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0$$

$$1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

2-x-1=0; x=1

Si x<1 f´(x)>0 creciente $(-\infty, 1)$

Si x>1 f´(x)<0 decreciente $(1, \infty)$

www.academianuevofuturo.com
Teléfono: 914744569

B.4. (2 puntos)
Un estudio sobre la obsolescencia programada en una marca de electrodomésticos reveló que la probabilidad de que un microondas se estropee durante el período de garantía es 0,02. Esta probabilidad se eleva a 0,05 para sus hornos eléctricos y se sabe que estos sucesos son independientes. Cuando el microondas se ha estropeado en el período de garantía, la marca amplía esta por dos años más. El 40 % de los clientes con garantía ampliada no conserva la factura de compra durante los dos años de ampliación.

a) Un cliente compra un horno y un microondas de esta marca. Obtenga la probabilidad de que se estropee al menos uno de ellos durante el período de garantía.
b) Un cliente ha comprado un microondas. Calcule la probabilidad de que se le estropee durante el período de garantía y conserve la factura durante los dos años de ampliación.

Sea E_M el suceso: el microondas se estropea durante el periodo de garantía.

Sea E_H el suceso: el horno se estropea durante el periodo de garantía.

Sea C el suceso el cliente conserva factura durante esos dos años.

a) $P(E_M \cup E_H) = PE_M + PE_H - P(E_M \cap E_H) = 0{,}02 + 0{,}05 - 0{,}02 \cdot 0{,}05 = 0{,}069$

b) $p(E_M \cap \bar{C}) = 0{,}02 \cdot 0{,}6 = 0{,}012$

B.5. (2 puntos)
Determinado modelo de lavadora tiene un programa de lavado con un consumo de agua que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es de 7 litros.
a) En una muestra aleatoria simple de 10 lavadoras los consumos de agua en un lavado con este programa fueron los siguientes:

40 45 38 44 41 40 35 50 40 37

Construya el intervalo de confianza al 90 % para estimar el consumo medio de agua de este modelo de lavadoras con dicho programa de lavado.
b) A partir de una muestra de 64 lavadoras elegidas al azar, se obtuvo un intervalo de confianza para la media con una longitud de 5 litros. Obtenga el nivel de confianza utilizado para construir el intervalo.

a) $\bar{x} = \frac{\sum x}{N} = \frac{40+45+38+44+41+40+35+50+40+37}{10} = 41$

$$I_\mu = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad 1-\alpha = 0.90 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1'645$$

$$I_\mu = \left(41 - 1'645\frac{7}{\sqrt{10}}\ ;\ 41 + 1'645\frac{7}{\sqrt{10}}\right) = (37'35\ ;\ 44'64)$$

b) n=64

$$L = 2\, z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2z_{\alpha/2}\frac{7}{\sqrt{64}} = 5 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{5\sqrt{64}}{2\cdot 7} = 2'86$$

$$P(Z \le 2'86) = 0'9979 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 0'0042 \Rightarrow 1-\alpha = 0'9958$$

www.academianuevofuturo.com Teléfono: 914744569