Junio 2014-2015

OPCION A

Problema nº1

a)

1º Se escribe la matriz A y la matriz A*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & \mathrm{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & \mathrm{a} & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2º Se calcula el valor de a que hace al determinante A=0

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2 + a - 3a - 2 = 0 \Rightarrow a=-2$$

Discusión del sistema:

Si $\mathrm{a} \neq -2 |\mathrm{A}| \neq 0 \ \rightarrow \mathrm{Rg\ A} = 3 \quad \mathrm{Rg\ A^*} = 3$ Sistema Compatible Determinado

Si $\mathrm{a} = -2 |\mathrm{A}| = 0 \ \rightarrow \mathrm{Rg\ A} = 2 \quad \mathrm{Rg\ A^*} = 3$ Sistema Incompatible

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow RA = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 RA^* = 3$$

b)

Resuélvase para a=1

Para calcular este sistema se utilizará el método de Cramer:

$$|A| = -2a - 4 = -6$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = 2$$

$$Y = \frac{|A_Y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 8 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = -1$$

$$z = \frac{|A_Z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-6} = -1$$

Problema nº2

a)

$$f(x) = \int 3x^2 + 2xdx = x^3 + x^2 + C$$

$$f(1) = 4 = 1^3 + 1^2 + C \to C = 2$$

b)

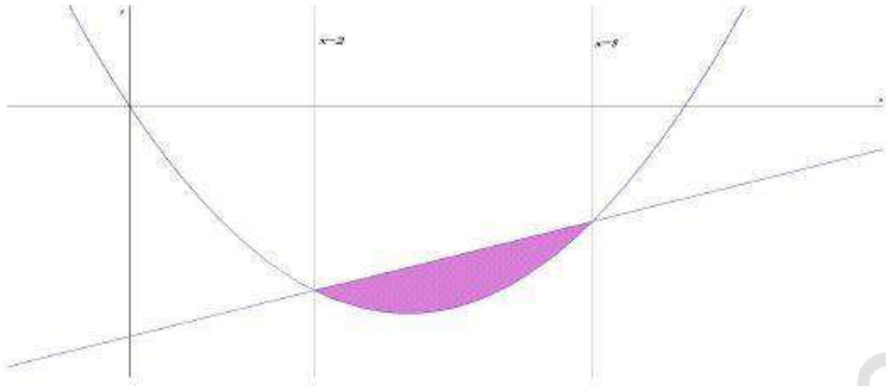
Se calcula el valor de m en x=1

$$m = f'(1) = 3x^2 + 2 = 5$$

Se calcula la recta tangente

$$y - yo = m(x - xo) \to y - 4 = 5(x - 1) \to y = 5x - 1$$

Problema nº3



a)

b)

Se calcula primero los puntos de corte entre la f(x) y la g(x):

$$x - 10 = x^2 - 6\text{x} \rightarrow \text{x}^2 - 7\text{x} + 10 = 0$$

Las funciones se cortan es x=2 y x=5

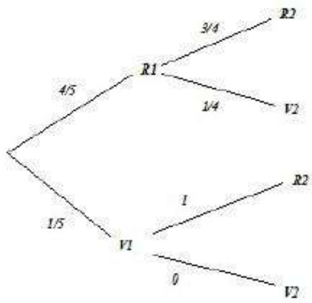
Se realizara la integral entre las x del corte de las funciones:

$$\int_2^5 f(x)dx - \int_2^5 g(x)\,dx = \int_2^5 x^2 - 6\,dx - \int_2^5 x - 10\,dx$$

$$\left[\frac{x^3}{3} - 6x\right]_2^5 - \left[\frac{x^2}{2} - 10x\right]_2^5 = \left(\frac{125}{3} - 30 - \frac{8}{3} + 12\right) - \left(\frac{25}{2} - 50 - 2 + 20\right) = \frac{9}{2}u^2$$

$$\int_2^5 (f(x) - g(x))\,dx = \int_2^5 (x - 10 - x^2 + 6x)\,dx = \int_2^5 (-x^2 + 7x - 10)\,dx =$$
$$-\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 10x|_2^5 = -\frac{125}{3} + \frac{175}{2} - 50 - \left(-\frac{8}{3} + \frac{28}{2} - 20\right) = \frac{9}{2}u^2$$

Problema nº4



a)

La probabibilidad de sacar 2 bolas del mismo color es

$$P(mismo\ color) = \frac{4}{5}.\frac{3}{4} + \frac{1}{5}.0 = \frac{3}{5}$$

b)

La probabilidad condicionada de este sujeto es:

$$p\left|{}^{v_1}/_{R_2}\right| = \frac{p(v_1 \cap R_2)}{p(R_2)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{5}\cdot 1} = \frac{1}{4}$$

Problema nº5

a)

El valor de $Z_{\propto/2}$ se calcula mediante el nivel de confianza.

0,95=1-∝→∝= 0,05

$$1 - \frac{0^1 o_5}{2} = 0{,}975 \Rightarrow z\infty/_2 = 1{,}96$$

$$Z_{\propto/2} = 1 - \frac{0{,}05}{2} = 0{,}975$$

Se obtiene que el valor de $Z_{\propto/2}$ mediante las tablas de la distribución normal es de 1,96,

Mediante el intervalo de confianza se calcula la media y el error:

$$\bar{x} - E = 701$$

$$\bar{x} + E = 799$$

Resolviendo el sistema

$$\bar{X} = 750 \qquad E = 49$$

$$E = Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 49 \rightarrow n = 100$$

b)

El valor de $Z_{\propto/2}$ se calcula mediante el nivel de confianza.

0,80=1-$\propto \rightarrow \propto = 0{,}20$

$$Z_{\propto/2} = 1 - \frac{0{,}2}{2} = 0{,}90$$

Se obtiene que el valor de $Z_{\propto/2}$ mediante las tablas de la distribución normal es de 1,285, por lo que intervalo de confianza es:

$$E = Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 64{,}25$$

OPCION B

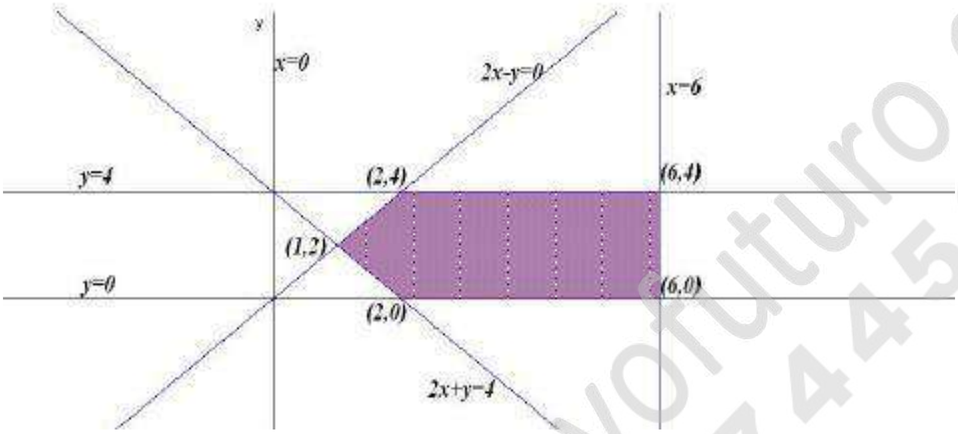
Problema nº1

a)

La región factible se encontrara en el cuadrante I debido a que tanto la x como la y deben ser mayores o iguales a 0. Por lo que el vértice que se obtiene entre estas 2 rectas es el punto A (0.0).

Para calcular los vértices de las otras rectas tendremos que hacer una tabla de datos. Una vez se representan las rectas se toman un punto de prueba para delimitar la región factible el (1,1).

X<6 1<6 Se cumple
Y>4 1<4 Se cumple
Y<2X 1<2 Se cumple
2X+Y>4 3>4 No se cumple
Se representa gráficamente la zona factible de la función:



Los vértices que observan son A (1,2), B (2,0), C (2,4) ,D(6,4) y E(6,0)

b)

Para calcular el máximo se sustituyen los valores de los vértices que se han obtenido anteriormente en la función a maximizar.

Vértice	X	y	Función
A	1	2	5000
B	2	0	2000
C	2	4	10000
D	6	4	14000
E	6	0	6000

El valor máximo de la función f(x,y)=1000x+2000 y se corresponde con el vértice D.

Problema nº2

a)

Se calcula el valor de a que hace al determinante A=0

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & k & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8 - 4k = 0 \Rightarrow k = 2$$

Discusión de la matriz:

Si $\mathrm{k} \neq 2 \, |\mathrm{A}| \neq 0 \ \rightarrow \mathrm{Rg\,A} = 3$

Si $\mathrm{k} = 2 \, |\mathrm{A}| = 0 \ \rightarrow \mathrm{Rg\,A} = 2$

$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow RA = 2$

b)

$A^{-1} = \frac{(adj\,A)^t}{|A|}$

1º Se calcula el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 12 = -4$$

2º Se calcula el adjunto de la matriz A:

$$(adj\,A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & -8 \\ 4 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

3º Se calcula la transpuesta del adjunto de la matriz A:

$$(adj\ A)^t = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \\ 3 & -8 & 6 \end{bmatrix}$$

4º Se calcula la matriz inversa de A:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ -\frac{3}{4} & 2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Problema nº3

a)

Para que una función por partes sea continua los valores de f en la discontinuidad deben ser los mismos.

$$f(x)\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} & si\ x < 2 \\ 3x+m & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-3)(x-2)} = -4$$

f(2)=3·2+m=6+m

$$\lim_{x\to 2^+} 3x+m \ = 6+m$$

6+m=-4

$$m = 10$$

b)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}3x-6=-\infty$$

Problema nº4

a)

$$P(A\ U\ B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)$$

b)

$$P(A\ U\ B)=P(B)+P(A\cap\bar{B})=0{,}2+0{,}7=0{,}9$$

$$P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)\to P(A)=0{,}5$$

$$P\left(\frac{B}{\bar{A}}\right)=\frac{P(\bar{A}\cap B)}{1-P(A)}=\frac{0{,}7-0{,}3}{0{,}5}=\frac{4}{5}$$

Problema nº5

a)

El valor de $Z_{\propto/2}$ se calcula mediante el nivel de confianza.

0,99=1-$\propto\to\propto=0{,}01$

$$1-\frac{0{,}01}{2}=0{,}995$$

Se obtiene que el valor de $Z_{\propto/2}$ mediante las tablas de la distribución normal es de 2,575, por lo que intervalo de confianza es:

$$(\bar{x}-Z_{\frac{\propto}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+Z_{\frac{\propto}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=(7713{,}89;8286{,}11)$$ b)

N(8100,100)

b)

, , ,

$$P(7904 < \overline{X} < 8296)\begin{cases} Z = \dfrac{8296 - 8100}{100} = 1{,}96 \\ Z = \dfrac{7904 - 8100}{100} = -1{,}96 \end{cases}$$

$$P(-1\,96 < Z < 1\,96) \rightarrow P(Z < 1{,}96) - P(Z < -1\,96)$$

$$2P(Z < 1{,}96) - 1 = 1{,}95 - 1 = 0{,}95$$