Junio 2013-2014

OPCION A

Problema nº1

a)

$$A^{-1}=\frac{adj(A)^t}{|A|}$$

1ºSe calcula la matriz transpuesta de A:

$$(A^t)=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

2º Se calcula la matriz A^tB:

$$A^tB=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 5 & 1\end{pmatrix}$$

3º Se calcula el determinante de A^tB:

$$|A^tB|=5$$

4º Se calcula el adjunto de la matriz A^tB:

$$adjA^tB=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

5º Se calcula la transpuesta del adjunto de la matriz A^tB:

$$\left(adj(A^tB)\right)^t=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 0 & 5\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -5 & 5\end{pmatrix}$$

6º Se calcula la matriz inversa de A^tB:

$$(A^tB)^{-1}=\begin{pmatrix}1/5 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & +y\\ - & x\\ x+ & 2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 5\end{pmatrix}$$

$$x=1$$

$$2x+y=0\rightarrow\quad y=-2$$

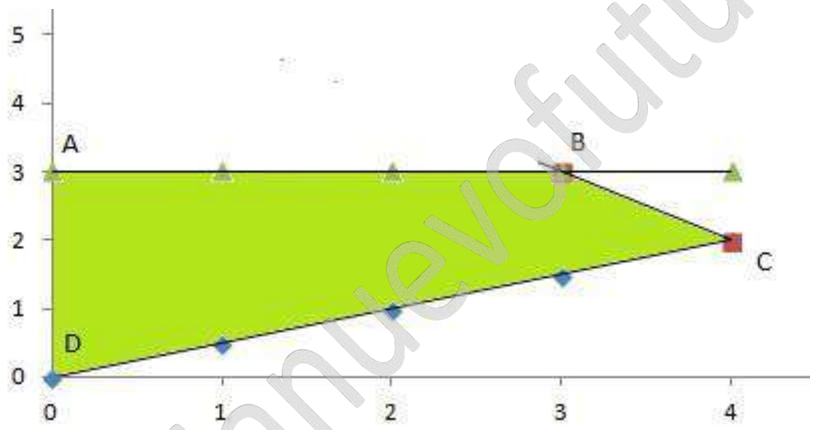
Problema 2:

a)

La región factible se encontrará en el cuadrante I debido a que tanto la x como la y deben ser mayores o iguales a 0. Por lo que el vértice que se obtiene entre estas 2 rectas en el punto (0,3).

Para calcular los vértices de las otras 2 rectas tendremos que hacer una tabla de datos. Una vez se representan las 2 rectas se toman un punto de prueba para delimitar la región factible el (0,1).

$x-2y\leq0$ $-2\leq0$ se cumple.
$x+y\leq6$ $0\leq6$ se cumple.



b)

Para calcular el máximo se sustituyen los valores de los vértices que se han obtenido anteriormente en la función a maximizar.

Vértice	y	x	Función
A	0	3	-6
B	3	3	9
C	4	2	16
D	0	0	0

El vértice que maximiza la función es el vértice C y el que la minimiza el vértice A.

Problema 3

a)

Para que una función por partes sea continua los valores de f en la discontinuidad deben ser los mismos.

$$f'(x)\begin{cases} x+a & si\ x<1 \\ x^2-2 & si\ 1< x<3 \\ x+b & si\ x>3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to1^-} x+a=1+a$$
$$\lim_{x\to1^+} x^2-2=-1$$

$$\lim_{x\to1^-} = \lim_{x\to1^+} \to a=-2$$

$$\lim_{x\to3^-} x^2-2=7$$
$$\lim_{x\to3^+} x+b=3+b$$

$$\lim_{x\to3^-} = \lim_{x\to3^+} \to b=4$$

La función será continua cuando a=-2 y b=4.

b)

$$\int_1^3 x^2-2dx \to \left[\frac{x^3}{3}-2x\right]_1^3 \to 9-6-\frac{1}{3}+2=\frac{14}{3}$$

Ejercicio 4

a)

P(A)=0,4   P(A U B)=0,5   P(B/A)=0, 5

Se calcula la probabilidad de la intersección de A y B

$$P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{P(B\cap A)}{PA}\to P(B\cap A)=0{,}5.0{,}4=0{,}2$$

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(AUB)\to 0{,}4+P(B)-0{,}5=0{,}2$$
$$P(B)=0\ 3,$$

b)

$$P\left(\frac{A}{\bar{B}}\right)=\frac{P(A\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}=\frac{0{,}4-0{,}2}{0{,}7}=\frac{2}{7}=0{,}28$$

Problema nº5

a)

El intervalo de confianza para la media a partir de la media de las muestras es:

$$(\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (35{,}151; 36{,}894)$$

El valor de $Z_{\alpha/2}$ se calcula mediante el nivel de confianza.

0,95=1-$\alpha \rightarrow \alpha = 0{,}05$

$$Z_{\alpha/2} = 1 - \frac{0{,}05}{2} = 0{,}975$$

Se obtiene que el valor de $Z_{\alpha/2}$ mediante las tablas de la distribución normal es de 1,96, :

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}849$$

a)

El valor de $Z_{\alpha/2}$ se calcula mediante el nivel de confianza.

0,90=1-$\alpha \rightarrow \alpha = 0{,}1$

$$Z_{\alpha/2} = 1 - \frac{0{,}1}{2} = 0{,}95$$

Se obtiene que el valor de $Z_{\alpha/2}$ mediante las tablas de la distribución normal es de 1,645

$$E = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow n = \left(Z_{\alpha/2}\frac{E}{\sigma}\right)^2 = 24{,}35$$

Luego n=25

OPCION B

Problema nº1

a)

1º Se escribe la matriz A y la matriz A*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 3 & 4 & 2 & a \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2º Se calcula el valor de a que hace al determinante A=0

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 0 = a - 3 \rightarrow a = 3$$

Discusión del sistema:

Si a≠ 3 $|A| \neq 0 \ \rightarrow \mathrm{Rg\ A} = 3 \quad \mathrm{Rg\ A^*} = 3$ Sistema Compatible Determinado

Si a= 3 $|A| = 0 \ \rightarrow \mathrm{Rg\ A} = 2 \quad \mathrm{Rg\ A^*} = 2$ Sistema Compatible Indeterminado

Porque $F_3 = F_2 - F_1$

b)

Este sistema de ecuaciones se resolverá por el método de Cramer:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = a - 3 = -4$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{-4} = 3$$

$$y = \frac{|A_Y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & --1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-4} = \quad -2$$

$$z = \frac{|A_Z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-4} = -1$$

Problema 2

a)

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x$$

Primero se calcula el valor y de la función en x=1

$$y = f(1) = 4x^3 - 3x^2 - 2x = -1$$

Para calcular la tangente a una función se realiza la primera derivada con la que se obtiene la pendiente de la recta tangente.

$$f'(x) = 12x^3 - 6x - 2$$

Para calcular la pendiente en el punto x=1 se sustituye la x en la primera derivada.

$$f'(1) = 4$$

La pendiente de la función en x=1 es 4. Para calcular la recta tangente se debe obtener la ordenada en el origen mediante la ecuación explicita de la recta:

$$y = mx + n \rightarrow -1 = \quad 4.1 + n \rightarrow n = -5$$

$$y = 4x - 5$$

b)

$$\int_3^3 4x^3 - 3x^2 - 2xdx \rightarrow [x^4 - x^3 - x^2]_3^3$$

$$81 - 27 - 9 - 16 + 8 + 4 = 41$$

Problema 3

$$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$$

a)

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-2} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow L, Hopital \rightarrow \frac{2x}{1} = \infty$$

No existe asíntota horizontal

Asíntotas verticales:

Los valores de x que hacen el cociente infinito son los que hacen el denominador 0:

$$x-2=0 \quad x=2$$

Asíntota vertical en x=2

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

Asíntotas oblicuas

Al no existir asíntotas horizontales puede existir asíntotas oblicuas.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x-2}}{x} = \frac{x^2}{x^2-2x} = \frac{\infty}{\infty} = 1$$
$$n = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - mx\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x^2-2x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} = 2$$

Asíntota oblicua: y=x+2

b)

Dominio: R-[2]

Extremos relativos

Para calcular los extremos relativos de una función se debe realizar la primera derivada e igualarla a 0.

$$f'(x) = \frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

$$x^2-4x=0 \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

Se comprobará el crecimiento y el decrecimiento de la función por intervalos:

	(-∞ , 0)	(0 , 2)	(2 , 4)	(4 , ∞)
x^2-4x	+	-	-	+
(x-2)^2	+	+	+	+
f´(x)	+	-	-	+

La función crece: (-∞, 0)U (4, ∞)
La función decrece: (0, 2)U(2,4)

Tiene un mínimo relativo en (4,8) y un máximo relativo en (0,0)

Problema 4

a)

$$P(R) = P(A)P\left(\frac{R}{A}\right) + P(B)P\left(\frac{R}{B}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} = \frac{7}{15}$$

b)

Se utiliza el teorema de Bayes:

$$P\left(\frac{A}{R}\right) = \frac{P(A)P(\frac{R}{A})}{P(R)} = \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{7}{15}} = \frac{3}{7}$$

Problema 5

a) El intervalo de confianza es:

$$(16{,}33; 19{,}27)$$

El valor de $Z_{\propto/2}$ se calcula mediante el nivel de confianza.

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05$$
$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1.96$$

Se obtiene que el valor de $Z_{\propto/2}$ mediante las tablas de la distribución normal es de 1,96:

$$E = Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow n = (Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{E})^2 = 16$$

b)

$$E = Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}735$$