Junio 2012-2013

OPCION A

Problema nº1:

Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

a) Calcúlese la matriz A^{-1}.

$$A^{-1}=\frac{adj(A)^t}{|A|}$$

1º Se calcula el determinante de A:

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0-2+0-0-2+3=-1$$

2º Se calcula el adjunto de la matriz A:

$$(adj\ A)=\begin{vmatrix} +\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 3 & -1\\ -2 & 3 & -2\end{vmatrix}$$

3º Se calcula la transpuesta del adjunto de la matriz A:

$$(adj\ A)^t=\begin{vmatrix}1 & -2 & -2\\ -2 & 3 & 3\\ 1 & -1 & -2\end{vmatrix}$$

4º Se calcula la matriz inversa de A:

$$A^{-1}=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -3 & -3\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

b) Resuélvase el sistema de ecuaciones dado por

$$A.\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Como en el apartado anterior se calculo la matriz inversa de A y por las propiedades de las matrices se sabe que $A^{-1}.A=I$ se efectúa el siguiente cambio en el sistema de ecuaciones:

$$A^{-1}.A.\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}.\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\to I.\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}.\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

Por lo que la matriz incógnita será:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0+2 \\ 2+0-3 \\ -1+0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Problema nº2:

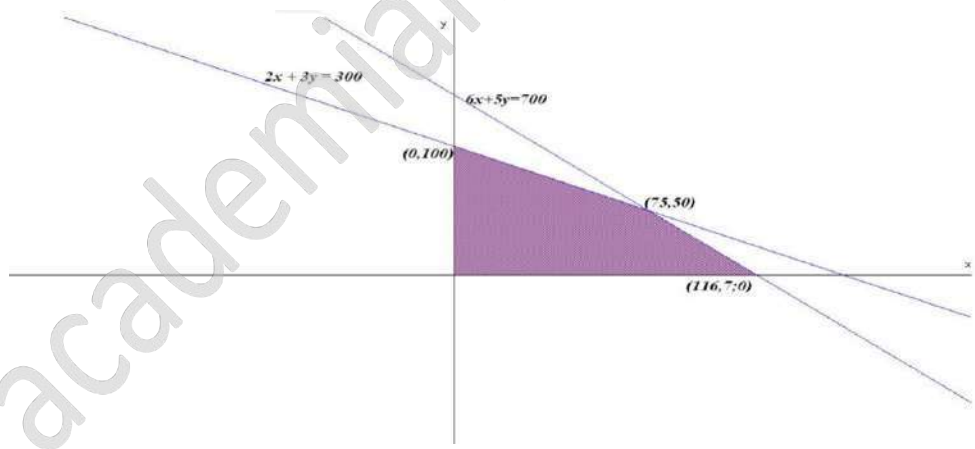
Se desea maximizar la función f(x,y)=64,8x+76,5y la cual está sujeta a las siguientes restricciones:

x≥0 , y≥0 , 6x+5y≤700 , 2x+3y≤300

a)
La región factible se encontrará en el cuadrante I debido a que tanto la x como la y deben ser mayores o iguales a 0. Por lo que el vértice que se obtiene entre estas 2 rectas es el origen de ordenadas (0,0).

Para calcular los vértices de las otras 2 rectas tendremos que hacer una tabla de datos. Una vez se representan las 2 rectas se toman un punto de prueba para delimitar la región factible el (0,0).

6x+5y≤700 0<700 se cumple.
2x+3y≤300 0>300 se cumple.



Los vértices que observan son A(0,0) , B(0,100), D(116.7,0) y el punto C se calcula mediante un sistema de ecuaciones entre las 2 rectas en la que se obtiene el punto C(75,50).

b) Determine el máximo de f sobre la región indicando el punto donde se alcanza dicho máximo.

Para calcular el máximo se sustituyen los valores de los vértices que se han obtenido anteriormente en la función a maximizar.

Vértice	y	x	Función
A	0	0	0
B	116.7	0	7560
C	75	150	8685
D	0	100	7650

El vértice que maximiza la función es el vértice C.

Problema nº3

a) Obtener la función de la recta tangente de la gráfica f que pasa por x=0.

Primero se calcula el valor y de la función en x=0

$$y = f(0) = 3e^{-2.0} = 3$$

Para calcular la tangente a una función se realiza la primera derivada con la que se obtiene la pendiente de la recta tangente.

$$f'(x) = 3e^{-2x}.-2 = -6e^{-2x}$$

Para calcular la pendiente en el punto x=0 se sustituye la x en la primera derivada.

$$f'(0) = -6e^{-2.0} = -6.1 = -6$$

La pendiente de la función en x=0 es -6. Para calcular la recta tangente se debe obtener la ordenada en el origen mediante la ecuación explicita de la recta:

$$y = mx + n \rightarrow 3 = -6.0 + n \rightarrow n = 3$$

$$y = -6x + 3$$

b) Calcúlese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica f, las rectas de x=0 y x=0,5 y el eje de abscisas.

Para calcular el área de una región se debe realizar la integral de la función.

$$\int_0^{0,5} 3e^{-2x}\,dx \rightarrow \frac{3}{-2}(e^{-2x})_0^{0,5} \rightarrow \frac{3}{-2}(e^{-2.0,5}) + \frac{3}{2}(e^{-2.0} = \rightarrow \frac{3}{2}(1-\frac{1}{e})$$

Problema nº4

a)

Se definen las probabilidades que se conocen por el enunciado:

Probabilidad de ser deportista P(A)=0,4
Probabilidad de ser lector P(B)=0.3
Probabilidad de ser deportista o lector P(AUB)=0,55

Se calcula la probabilidad de ser deportista y lector:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(AUB) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}55 = 0{,}15$$

Se calculará la probabilidad de ser deportista y no lector si a la probabilidad de ser deportista se le resta la probabilidad de ser deportista y lector.

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}15 = 0{,}25$$

b)

Se calcula la probabilidad de que, siendo lector, realice deporte.

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{PB} = \frac{0{,}15}{0,3} = 0{,}5$$

Problema nº5:

a)

Se comprueba mediante los datos del enunciado que nuestra distribución normal es N(3,5,1,4).

$$N(3.5; 1.4) \;\; n = 24 \;\; N\left(3.5; \frac{1.4}{\sqrt{24}}\right)$$

Se pide que calculemos la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 3,37 para ello tipificaremos.

$$P(X < 3.37) = P(z < \frac{3.37 - 3.5}{0.28}) = P(z < -0.46) = 1 - P(z < 0.46) = 0.3328$$

b)

El intervalo de confianza para la media a partir de la media de las muestras es:

$$(\bar{x} - Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

El valor de $Z_{\propto/2}$ se calcula mediante el nivel de confianza.

0,95=1-∝→∝= 0,05

$$Z_{\propto/2} = 1 - \frac{0{,}05}{2} = 0{,}975$$

Se obtiene que el valor de $Z_{\propto/2}$ mediante las tablas de la distribución normal es de 1,96, por lo que intervalo de confianza es:

$$IC = (2.86; 3.98)$$

OPCION B

Problema nº1:

a) Discútase la función de los valores del parámetro a€R

1º Se escribe la matriz A y la matriz A*

$$A = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2º Se calcula el valor de a que hace al determinante A=0

$$A = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 0 = -a + 2 + 0 + 0 + 6 + 3a = 2a + 8 \rightarrow a = -4$$

Discusión del sistema:

Si a≠-4

$$|A| \neq 0 \ \rightarrow \mathrm{Rg\ A} = 3 \quad \mathrm{Rg\ A^*} = 3 \quad \text{Sistema Compatible Determinado}$$

Si a=-4

$$A^* = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rango(A^*) = 3 \neq rango(A) \Rightarrow SI$$

b) Resuélvase para a=1

$$\begin{cases} x & -2y & 0 & = & 2 \\ 3x & -y & -z & = & -1 \\ x & 3y & z & = & 1 \end{cases}$$

Para calcular este sistema se utilizará el método de Cramer:

$$|A| = -1 + 0 + 2 - 0 + 3 + 6 = 10$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{10} = \frac{2}{5}$$

$$Y = \frac{|A_Y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{10} = -\frac{4}{5}$$

$$z = \frac{|A_Z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{10} = 3$$

Problema nº 2

a) Estúdiese la continuidad en x=0 para f(x) con los distintos valores del parámetro a.

Para que una función por partes sea continua los valores de f en la discontinuidad deben ser los mismos.

$$\lim_{x \to 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{a + 3x}{x^2 - 4x + 3} = \frac{a}{3}$$

$$\lim_{x \to 0^-} = \lim_{x \to 0^+} \to 1 = \frac{a}{3} \to a = 3$$

Cuando a=3 la función será continúa debido a que sus límites son iguales.

b) Determine las asíntotas de la función:

$Si\ x < 0$

$$No\ verticales$$

$$Horizontales$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$$

No existe asíntota oblicua porque hay asíntota horizontal.

$Si\ x \geqslant 0$

$$Horizontales$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$Verticales$$

$\underline{x = 1}$

$Si\ a = -3$

$$\lim_{x\to 1} \frac{-3+3x}{x^2-4x+3} = \frac{3}{2}$$

$Si\ a \neq 3$

$$\lim_{x\to 1} \frac{a+3x}{x^2-4x+3} = \infty$$

$\underline{x = 3}$

$Si\ a = -3$

$$\lim_{x\to 1} \frac{-3+3x}{x^2-4x+3} = \frac{3}{2}$$

$Si\ a \neq 3$

$$\lim_{x\to 1} \frac{a+3x}{x^2-4x+3} = \infty$$

No existe asíntota oblicua porque hay asíntota horizontal.

Problema nº3

a)

Para el cálculo de los intervalos de crecimiento y decrecimiento se debe realizar la primera derivada de la función.

$$f(x) = x(x-5)^2 \to f'(x) = (x-5)^2 + x.2(x-5)$$

Para calcular los máximos y los mínimos se iguala la primera derivada a 0 ya que en estos puntos se produce un cambio en el crecimiento de la función.

$$f'(x) = ((x-5) + x.2)(x-5)$$

$$x - 5 = 0 \to x = 5$$

$$(x-5)+x.2=0 \rightarrow x=\frac{5}{3}$$

Se analiza el crecimiento y decrecimiento de la función en la siguiente tabla:

	[-∞,(5/3)]	[(5/3),5]	[5,∞]
(x-5)	-	-	+
(3x-5)	-	+	+
(x-5)(3x-5)	+	-	+

La función crece de [-∞,(5/3)] u [5,∞]
La función decrece de [(5/3),5]

b)

La curvatura se analiza con la segunda derivada de la función:

$$f''(x)=3(x-5)+(3x-5)=6x-20$$

Para calcular los puntos de inflexión se iguala la segunda derivada a 0 ya que en estos puntos se produce un cambio en la curvatura de la función.

x=10/3

La función es convexa de [-∞,(10/3)] porque la f´´(x)<0 La función es cóncava de [10/3,∞] porque la f´´(x)>0

Problema nº4

a)

Probabilidad que el arreglo lo realice un sastre

P(A)=0,55 P(B)=0,3 P(C)=0,15

Probabilidad de que el cliente no quede satisfecho con el arreglo según el sastre

P(S/A)=0,05 P(S/B)=0,08 P(S/C)=0,1

Para calcular la probabilidad de que un cliente no quede satisfecho con el arreglo tendremos que tener en cuenta el sastre que nos lo arregle y la probabilidad de que no quede satisfecho.

P(S)=0,55.0,05+0,3.0,08+0,15.0,1=0,0665

La probabilidad de que un cliente no quede satisfecho es del 6,65%

b)

Para calcular la probabilidad de que el cliente no quede satisfecho se utilizara el teorema de Bayes.

$$P\left(\frac{S}{A}\right) = \frac{P(A)P\left(\frac{S}{A}\right)}{P(S)} = \frac{0{,}55.0{,}05}{0{,}0665} = 0{,}4135$$

La probabilidad de que el cliente no quede satisfecho por el sastre A es del 41,35%

Problema nº5

a) Con un intervalo de confianza del 95% se puede calcular la probabilidad de la muestra.

El valor de $Z_{\propto/2}$ se calcula mediante el nivel de confianza.

0,95=1-∝→∝= 0,05

$$Z_{\propto/2} = 1 - \frac{0{,}05}{2} = 0{,}975$$

Se obtiene que el valor de $Z_{\propto/2}$ mediante las tablas de la distribución normal es de 1,96

Se calcula el tamaño muestral mínimo:

$$n = \left(\frac{1.96.1940}{100}\right)^2 = 1446$$

b) Para calcular el intervalo de confianza se utilizará la siguiente ecuación:

$$(\bar{x} - Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

El valor de $Z_{\propto/2}$ se calcula mediante el nivel de confianza.

0,95=1-∝→∝= 0,1

$$Z_{\propto/2} = 1 - \frac{0{,}1}{2} = 0{,}95$$

Se obtiene que el valor de $Z_{\propto/2}$ mediante las tablas de la distribución normal es de 1,645, por lo que intervalo de confianza es:

$$(12202\,,12628)$$