Junio 2011-2012 OPCION A

Problema nº1

a)

1º Se escribe la matriz A y la matriz A*

A=$\begin{pmatrix} 1 & a & -7 \\ 1 & 1+a & -a-6 \\ 0 & a & -6 \end{pmatrix}$ A*=$\begin{pmatrix} 1 & a & -7 & 4a-1 \\ 1 & 1+a & -a-6 & 3a+1 \\ 0 & a & -6 & 3a-2 \end{pmatrix}$

2º Se calcula el valor de a que hace al determinante A=0

$(-6-6a)-7a+6a+(a^2+6a)=a^2-a-6\ =0$ a=-2;a=3

Discusión del sistema:

Si a$\neq -2,3$ $|A| \neq 0 \rightarrow \mathrm{Rg}\,A=3$ $\mathrm{Rg}\,A^*=3$ Sistema compatible determinado.

Si a=-2 A=$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ A*=$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 & -9 \\ 1 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & -6 & -8 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0\ RA=2$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -9 \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & -8 \end{vmatrix}$=8+18-16-10=0

Todos los determinantes de tamaño tres de la matriz ampliada valen 0 RA*=3 Sistema incompatible.

Si a=3

A=$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 1 & 4 & -9 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$ A*=$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & 11 \\ 1 & 4 & -9 & 10 \\ 0 & 3 & -6 & 7 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \; R(A) = 2$$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}$=28+33-21-30≠ 0RA*=3 Sistema incompatible

b)

Se realiza el método de Gauss para conocer las infinitas soluciones.
Se resta la fila 1 menos la fila 2

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -7 & -9 \\ 1 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & -6 & -8 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & -6 & -8 \end{vmatrix}$$

$$z = \alpha$$
$$y + 3z = 4 \to y = 4 - 3\alpha$$
$$x - 2y - 7z = -9 \to x - 8 + 6\alpha - 7\alpha = -9 \to x = -1 + \alpha$$

Las infinitas soluciones son $(-1 + \alpha, 4 - 3\alpha, \alpha)$.

c)

$$\begin{cases} x & -3y & -7z & = & -13 \\ x & -2y & 3z & = & -8 \\ 0 & -3y & -6z & = & -11 \end{cases}$$

Para calcular este sistema se utilizará el método de Cramer:

X=$\dfrac{\begin{vmatrix} -13 & -3 & -7 \\ -8 & -2 & -3 \\ -11 & -3 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -7 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix}} = -\frac{4}{3}$

Y=$\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -13 & -7 \\ 1 & -8 & -3 \\ 0 & -11 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -7 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix}} = 7/3$

$$Z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -3 & -13\\ 1 & -2 & -8\\ 0 & -3 & -11\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -3 & -7\\ 1 & -2 & -3\\ 0 & -3 & -6\end{vmatrix}}=2/3$$

Ejercicio 2

$f(x)=(1200+x)\cdot(16-0,01x)=19200+4x-0,01x^2$

Para calcular el máximo de la función se realiza la primera derivada y se iguala a 0.

$$f'(x)=4-0{,}02x=0\rightarrow x=200$$

Para comprobar que se trata de un máximo se realiza la segunda derivada.

$$f''(x)=-0{,}02$$

Como la segunda derivada es negativa en todo el dominio se trata de un máximo.

Por lo que se concluye que para alcanzar la producción máxima se debe plantar 200 cepas.

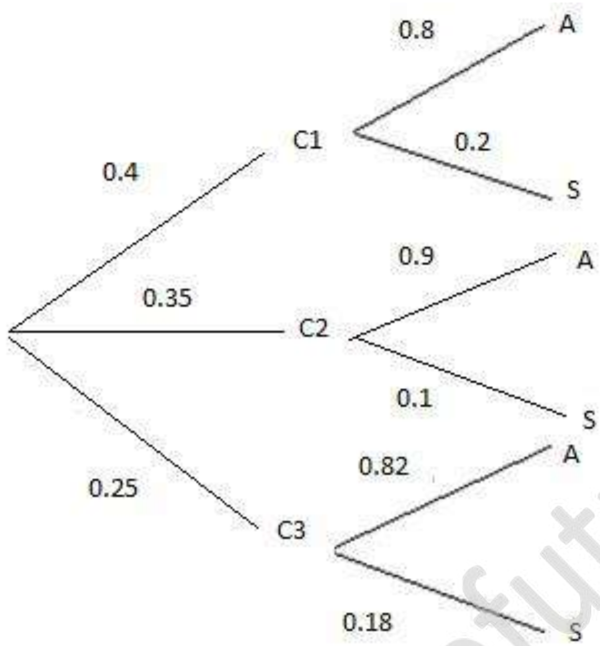
Problema nº3

a)

Se calculan las probabilidades de que un alumno pertenezca a un colegio.

P(A)=80/200=0,4   P(B)=70/200=0,35   P(C)=50/200=0,25

Se realiza un diagrama de árbol para representar todas las acciones posibles en el experimento.



La probabilidad de aprobar el examen será:

P(A)=P(C1).P(A/C1)+P(C2).P(A/C2)+P(C3),P(A/C3)=

$$p_A = 0.4 \cdot 0.8 + 0.35 \cdot 0.9 + 0.25 \cdot 0.82 = 0.84$$

b)

Para calcular la probabilidad de que superando el examen sea un alumno del colegio A se utilizara el teorema de Bayes.

$$p\left({}^{B}/_{S}\right) = \frac{p(B \cap S)}{ps} = \frac{0.35 \cdot 0.1}{1-0.84} = 0.219$$

Problema nº4

a)

Se calcula la media muestral con los datos expuestos en el enunciado:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{8} = \frac{232}{8} = 29$$

Para calcular el intervalo de confianza se utilizara la siguiente ecuación:

$$(\bar{x} - Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

El valor de $Z_{\propto/2}$ se calcula mediante el nivel de confianza.

0,90=1-$\propto \rightarrow \propto = 0{,}1$

$$1 - \frac{0{,}1}{2} = 0{,}95$$

$z_{\alpha/2} = 1.65\ IC = \left(29 - 1.65\frac{2.8}{\sqrt{8}}; 29 + 1.65\frac{2.8}{\sqrt{8}}\right)$IC((27,5;30,51)

b)

$$\text{E} = \left(Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow n = \left(Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\bar{x}}\right)^2 = 45{,}57$$

Para alcanzar el valor mínimo se necesitaran 46 muestras.

OPCION B

<u>Problema nº1</u>

X=nº de socios de A
Y=nº de socios de B
Z=nº de no socios

Se realiza un sistema de ecuaciones.

a) x+y+z=72000
b) (x+y)3=13z
c) y=x+6500

X+Y+Z=72000

3X+3Y-13Z=0

-X+Y=6500

Resolviendo EL sistema x=26000 y=32500 z=13500

En el estadio hay 26000 socios del equipo a y 32500 del equipo B.

Problema nº2

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & si\ x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & si\ x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} x^2 - 4x + 3 = 0 \qquad \lim_{x\to 1^+} -x^2 + 4x - 3 = 0$$

f(1)=1-4+3=0 función es continua por ser un polinomio.

Función continua en x=1. Además si x>1 o x<1 la función es continua por ser polinómica.

Para comprobar si una función es derivable se tiene que derivar y comprobar que los límites en el punto de discontinuidad de esa derivada son iguales.

$$f'_{(x)} = \begin{cases} 2x-4 & x<1 \\ -2x+4 & x>1 \end{cases}$$

$f'(1^-)=2\cdot1-4=-2$

$f'(1^+)=-2\cdot1+4=2$

Función no derivable en x=1

Si x<1

Dominio: $(-\infty,1)$

Puntos de corte: A(1,0),B(0,3)

$$f'(x)=2x-4$$

Decreciente desde $(-\infty,1)$

La derivada se anula en el punto x=2 lo que significa que hay un extremo relativo pero como la función es x<1 no existe ese extremo relativo.

$$f''(x)=2$$

La función es convexa desde $(-\infty,1)$

Si x>1:

Dominio: $(1,\infty)$

Puntos de corte: A(1,0), C(3,0)

$$f'(x)=-2x+4$$

La derivada se anula en el punto x=2 lo que significa que hay un extremo relativo

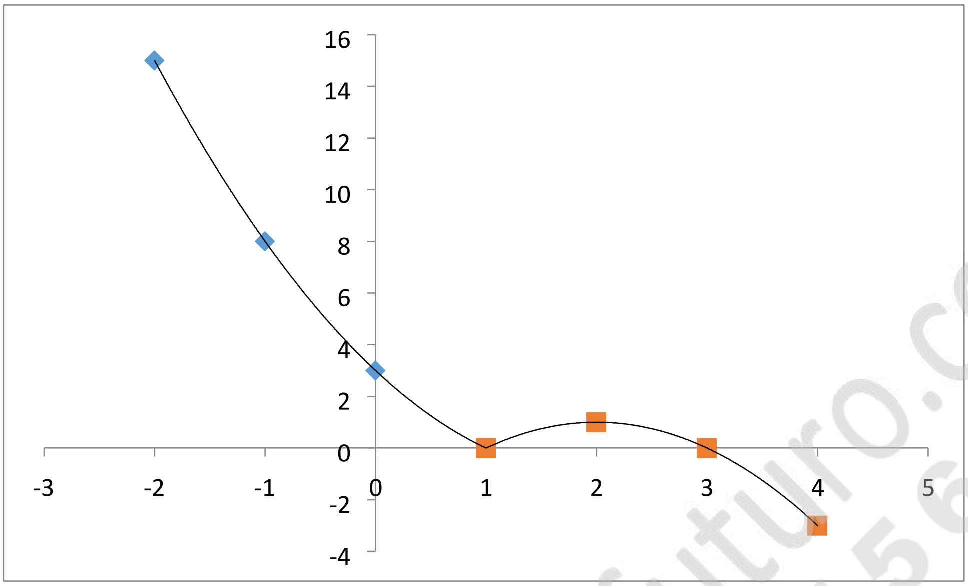
Función creciente desde (1,2)

Función decreciente desde $(2,\infty)$

Hay un máximo en el punto D(2,1).

$$f''(x)=-2$$

La función es cóncava desde $(1,\infty)$



c)

Para calcular el área de 0 a 2 se realiza la integral. Pero se debe tener en cuenta que en 1 hay un cambio de funciones por lo que se realizara por intervalos.

$$\int_0^1 x^2 - 4x + 3dx + \int_1^2 -x^2 + 4x - 3dx$$

$$\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_1^2$$

$$\frac{1}{3} - 2 + 3 + -\frac{8}{3} + 8 - 6 + \frac{1}{3} - 2 + 3 = 4 - \frac{6}{3} = 2u^2$$

<u>Problema nº3</u>

$$p(A \cup B) = 1 - p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$p(A\,/\,B) = \frac{p(A \cap \beta)}{p\beta} \Rightarrow 0.5 = \frac{0.1}{p\beta} \Rightarrow pB = \frac{0.1}{0.5} = 0.2$$

$$p(A \cup B) = p_A + pB - p(A \cap B)$$

0.4==PA+0.2-0.1

PA=0.3

a)PB=0.2

b) $p(A \cup B) = 0.4$

c) PA=0.3

d)$p\left(\bar{B}/_{\tilde{A}}\right) = \frac{p(\bar{B}\cap\bar{A})}{p_{\bar{A}}} = \frac{0.6}{1-0.3} = \frac{0.6}{0.7} = 0.8$

El intervalo de confianza para la media a partir de la media de las muestras es:

Problema nº4

$$(\bar{x} - Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

$$\begin{cases} 251.6 = \bar{x} - E \\ 271.2 = \bar{x} + E \end{cases}$$

Resolviendo el sistema $\bar{x} = 261.4$

$E = 9.8$

$$9.8 = z\alpha/_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{w}} \Rightarrow \mu = \left(\frac{1.96 - 45}{9.8}\right)^2 = 81$$

El valor de $Z_{\propto/2}$ se calcula mediante el nivel de confianza.

0,90=1-∝→∝= 0,1

$$1 - \frac{0,1}{2} = 0,95$$

Se obtiene que el valor de $Z_{\propto/2}$ mediante las tablas de la distribución normal es de 1,645, por lo que el numero minimo de muestras es:

$$E = Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 9{,}253$$

E=9,253€