Junio 2010-2011

OPCION A

Problema nº1

a) A=$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$ A*=$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & a & a \end{pmatrix}$

$$|A| = a^3 + a - a^2 - a = 0 \Rightarrow a^2(a-1) = 0$$

El determinante de la matriz es 0 cuando a=0 y a=1

Discusión del sistema:

Si a$\neq$ $0{,}1\,|A| \neq 0 \ \rightarrow \mathrm{Rg}\,A = 3 \quad \mathrm{Rg}\,A^* = 3$ Sistema Compatible Determinado

Si a= 0

A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ A*=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ RA=2

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \neq RA^* = 3$$

Sistema incompatible

Si a= 1

A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ A*=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ RA=2

Todos los determinantes de A* de tamaño 3 dan 0 ya que hay tres columnas iguales RA*=2
Sistema compatible indeterminado.

b)

$$\begin{cases} x & y & z & = & 1 \\ 0 & y & z & = & 1 \\ X & y & z & = & 1 \end{cases}$$

Se realiza el método de Gauss para conocer las infinitas soluciones.
Se resta la fila 1 menos la fila 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

Se pone z como un valor aleatorio.

$$z = \alpha$$
$$y + z = 1 \rightarrow y = 1 - \alpha$$
$$x + y + z = 1 \rightarrow x + 1 - \alpha + \alpha = 1 \rightarrow x = 0$$

Las infinitas soluciones son $(0,\ 1-\alpha,\ \alpha)$.

c)

$$\begin{cases} 3x & y & z & = & 3 \\ 0 & 3y & z & = & 1 \\ 3x & y & 3z & = & 3 \end{cases}$$

Para calcular este sistema se utilizará el método de Cramer:

$$|A| = a^2(a-1) = 18$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{18} = \frac{8}{9}$$

$$Y = \frac{|A_Y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{18} = \frac{1}{3}$$

$$z = \frac{|A_Z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{18} = 0$$

<u>Problema nº2</u>

a)

Se trata de una función racional, por lo que los valores que anulen el denominador no pertenecerán al dominio.

$$x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Dominio: R-$\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

Esta función solo tiene un punto de corte el (0,0).

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x^2 - 2} = \frac{\infty}{\infty} = 0$$

Asíntota horizontal en y=0

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to a} \frac{3x}{x^2 - 2} = \infty$$

Los valores de x que hacen el cociente infinito son los que hacen el denominador 0:

$$x^2 - 2 = 0 \qquad x = \pm\sqrt{2}$$

Asíntota vertical en x=$\pm\sqrt{2}$

Asíntotas oblicuas

No existe asíntota oblicua porque hay asíntota horizontal.

b)

Primero se calcula el valor y de la función en x=1

$$f(1) = \frac{3\cdot 1}{1^2 - 2} = \frac{3}{-1} = -3$$

Para calcular la tangente a una función se realiza la primera derivada con la que se Obtiene la pendiente de la recta tangente.

$$f'(x) = \frac{3(x^2-2) - 2x.3x}{(x^2-2)^2} = -3(\frac{x^2+2}{(x^2-2)^2})$$

Para calcular la pendiente en el punto x=0 se sustituye la x en la primera derivada.

$$f'(1) = -3\left(\frac{1^2+2}{(1^2-2)^2}\right) = -3.3 = -9$$

La pendiente de la función en x=1 es 3. Para calcular la recta tangente se debe obtener la ordenada en el origen mediante la ecuación explicita de la recta:

$$y = mx + n \rightarrow -3 = -9.1 + n \rightarrow n = 6$$

$$y = -9x + 6$$

c)

$$\int_2^3 f(x)dx = 3\int_2^3 \frac{x}{x^2-2}dx$$

$$\frac{3}{2}\int_2^3 \frac{2x}{x^2-2}dx = \frac{3}{2}ln|x^2-2|\Big|_2^3$$

$$= \frac{3}{2}(ln\,7 - ln\,2) = \frac{3}{2}ln\frac{7}{2}$$

<u>Problema nº3</u>

a)

Energía por placas solares: P(A)=0,4
Energía por eólica: P(B)=0,26
Energía por ambas : $P(A \cap B) = 0,12$

La energía producida por placas o por molinos es:

$$P(A\,UB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,26 - 0,12 = 0,54$$

b)

La probabilidad de una de que la energía sea suministrada por solo una de las 2 fuentes será la suma de la probabilidad de solo A mas la de solo B.

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,4 - 0,12 = 0,28$$

$$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0,26 - 0,12 = 0,14$$

$$P(A \cap \bar{B}) \cup P(B \cap \bar{A}) = 0,28 + 0,14 = 0,42$$

Problema nº4

a)

Para calcular el intervalo de confianza se utilizará la siguiente ecuación:

$$(\bar{x} - Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

El valor de $Z_{\propto/2}$ se calcula mediante el nivel de confianza.

$0,95=1-\propto \rightarrow \propto = 0,05$

$$1 - \frac{0,05}{2} = 0,95$$

Se obtiene que el valor de $Z_{\propto/2}$ mediante las tablas de la distribución normal es de 1,96, por lo que intervalo de confianza es:

$$\left(180 - 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{400}}; 180 + 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{400}}\right)$$

$$(178.53\ , 181.47)$$

b)

El valor de $Z_{\propto/2}$ se calcula mediante el nivel de confianza.

$0,90=1-\propto \rightarrow \propto = 0,1$

$$1 - \frac{0,1}{2} = 0,95$$

Se obtiene que el valor de $Z_{\propto/2}$ mediante las tablas de la distribución normal es de 1,645, por lo que el numero mínimo de muestras es:

$$n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}\sigma}{E}\right)^2 = \left(1.645 \cdot \frac{15}{3}\right)^2 = 67,6 \rightarrow 68$$

OPCION B

Problema nº1

a)

Para que una matriz no tenga inversa su determinante debe dar 0.
$|A| = -4k + 3 + k^2 = 0$Los valores que anulan el determinante son k=3 y k=1.

b)

1º Se calcula el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = k^2 - 4k + 3 = 3$$

2º Se calcula el adjunto de la matriz A:

$$(adj\ A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -12 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

3º Se calcula la transpuesta del adjunto de la matriz A:

$$(adj\ A)^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -12 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4º Se calcula la matriz inversa de A:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -4 & -4/3 & 1 \\ 1 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

Como en el apartado anterior se calculo la matriz inversa de A y por las propiedades de las matrices se sabe que $A^{-1}.A = I$ se efectúa el siguiente cambio en el sistema de ecuaciones:

$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B \rightarrow X = A^{-1}.B$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -4 & -4/3 & 1 \\ 1 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 2

Para que una función por partes sea continua los valores de f en la discontinuidad deben ser los mismos.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x} & si\ x \leqslant -1 \\ \dfrac{x^2 - b}{4} & si\ x > -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{a}{x} = -a$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 - b}{4} = \frac{1 - b}{4}$$

$$-a = \frac{1 - b}{4}$$

Para comprobar si una función es derivable se tiene que derivar y comprobar que los limites en el punto de discontinuidad de esa derivada son iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{a}{x^2} & Si \quad x < -1 \\ x/2 & Si \quad x > -1 \end{cases}$$

$f'(-1^-)=a$

$f'(-1^+)=-1/2$

a=-1/2

Para que la función sea derivable a=-1/2 es decir la derivabilidad no depende del valor de b, se calculara para que la función sea continua.

$$a = \frac{1-b}{4} \rightarrow b = 3$$

La función será continua y derivable para a=-1/2 y b=3.

b)

Función x<-1:

Dominio: (-∞,-1)

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Decreciente desde (-∞,-1)

$$f''(x) = \frac{1}{x^3}$$

La función es cóncava desde (-∞,-1)

Función x>1:

Dominio: (-1,∞)

Puntos de corte: $(-\sqrt{3},0)(\sqrt{3},0)$

$$f'(x) = \frac{x}{2}$$

La derivada se anula en el punto x=2 lo que significa que hay un extremo relativo

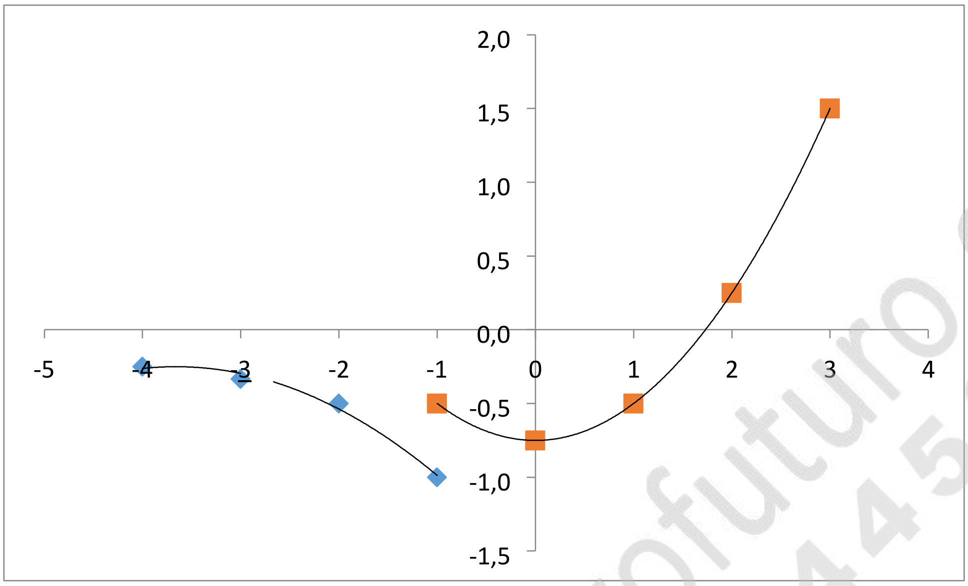
Función decreciente desde (-1,0)

Función creciente desde$(0,\infty)$

Hay un mínimo en el punto B(0,-3/4).

$$f''(x) = \frac{1}{2}$$

La función es convexa desde (-1,∞).



c)

$$\int_0^3 \frac{x^2-b}{4}dx = \frac{1}{4}\int_0^3 (x^2-b)dx = \frac{1}{4}(\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - [bx]_0^3) = \frac{1}{4}(9-3b) = 6$$

$$\frac{1}{4}(9-3b) = 6 \rightarrow 24 = 9-3b \rightarrow b = -5$$

Problema nº3

a)

Probabilidad de que pase un coche por el radar: P(A)=0,5
Probabilidad de que pase un camión por el radar: P(B)=0,3
Probabilidad de que pase una moto por el radar : P$(C) = 0,2$
Probabilidad de superar la velocidad máxima siendo un coche: P(S/A)=0,06
Probabilidad de superar la velocidad máxima siendo un camión: P(S/B)=0,02
Probabilidad de superar la velocidad máxima siendo una moto: P(S/C)=0,12

$$P(S) = P(A).P\left(\frac{S}{A}\right) + P(B).P\left(\frac{S}{B}\right) + P(C).P\left(\frac{S}{C}\right) = 0{,}5.0{,}06 + 0{,}3.0{,}02 + 0{,}2.0{,}12$$
$$P(S) = 0{,}06$$

b)

Para calcular la probabilidad de que habiendo superado la velocidad máxima sea una motocicleta utilizaremos el teorema de bayes:

$$P(C/S) = P(C).\frac{P\left(\frac{S}{C}\right)}{P(S)} = \frac{0{,}2.0{,}12}{0{,}06} = 0{,}4$$

Problema nº4

a)

Para calcular el intervalo de confianza se utilizará la siguiente ecuación:

$$(\bar{x} - Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Se calcula la media:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = 1{,}25$$

El valor de $Z_{\propto/2}$ se calcula mediante el nivel de confianza.

0,95=1-∝→∝$= 0{,}05$

$$1 - \frac{0{,}05}{2} = 0{,}95$$

Se obtiene que el valor de $Z_{\propto/2}$ mediante las tablas de la distribución normal es de 1,96, por lo que intervalo de confianza es:

$$\left(1.25 - 1.96 \cdot \frac{0.09}{\sqrt{10}}; 1.25 + 1.96 \cdot \frac{0.09}{\sqrt{10}}\right)$$

$$(1{,}194\,, 1{,}306)$$

c)

El valor de $Z_{\propto/2}$ se calcula mediante el nivel de confianza.

0,99=1-∝→∝$= 0{,}01$

$$1 - \frac{0{,}01}{2} = 0{,}995$$

Se obtiene que el valor de $Z_{\propto/2}$ mediante las tablas de la distribución normal es de 2,575, por lo que el numero mínimo de muestras es:

$$N = \left(2{,}575 \cdot \frac{0.09}{0.1}\right)^2 \rightarrow N = 6$$