Junio 2009-2010

OPCION A

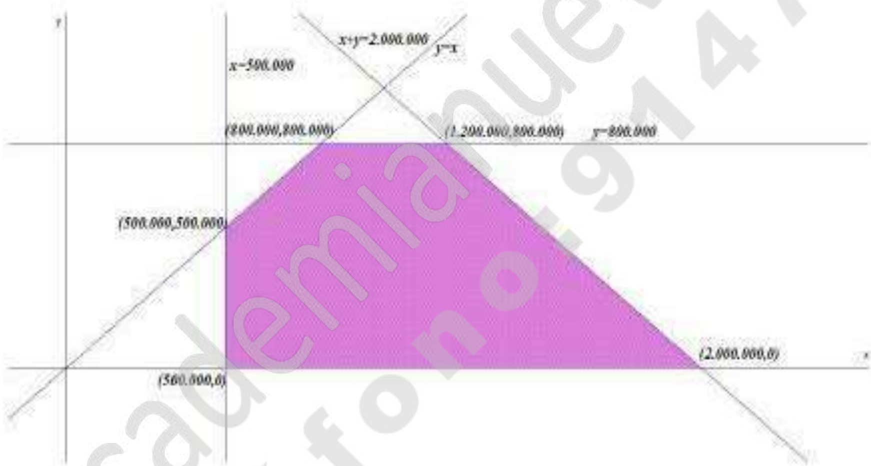
Problema nº1

a)

La región factible se encontrara en el cuadrante I debido a que tanto la x como la y deben ser mayores o iguales a 0.

Para calcular los vértices de las otras rectas tendremos que hacer una tabla de datos. Una vez se representan las rectas se toman un punto de prueba para delimitar la región factible el (0,0).

$x+y<2000000$ $0<2000000$ se cumple.
$Y<800000$ $0<800000$ se cumple. $x>500000$
$0>500000$ no se cumple. $X>y$



b)

Para calcular el máximo se sustituyen los valores de los vértices que se han obtenido anteriormente en la función a maximizar.

Vértice	x	y	Función

A	800000	800000	200000
B	1200000	800000	240000
C	500000	500000	125000
D	500000	0	50000
D	2000000	0	200000

El valor máximo de la función f(x,y)=0,1x+0,15y se corresponde con el vértice B.

Problema nº2

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

a)

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} \to L, Hopital \to \cdot \quad \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1} = \infty$$

No existe asíntota horizontal

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2}{x-1} = \infty$$

Los valores de x que hacen el cociente infinito son los que hacen el denominador 0:

$$x - 1 = 0 \qquad x = 1$$

Asíntota vertical en x=1

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$$

Asíntotas oblicuas

Al no existir asíntotas horizontales puede existir asíntotas oblicuas.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-x} = \frac{\infty}{\infty} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - mx\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^2 - x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} = 1$$

Asíntota oblicua: y=x+1

b)

Extremos relativos

Para calcular los extremos relativos de una función se debe realizar la primera derivada e igualarla a 0.

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

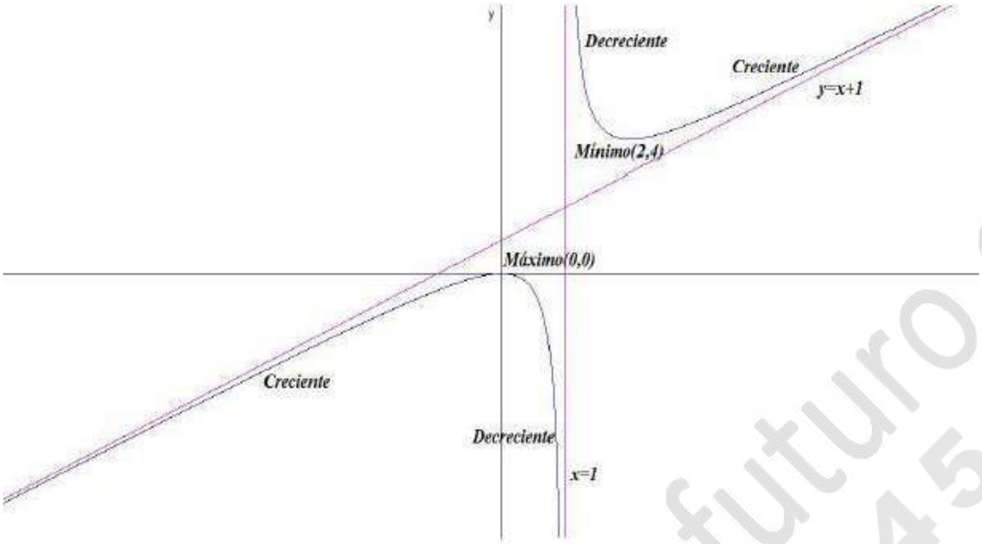
$$x^2 - 2x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Se comprobará el crecimiento y el decrecimiento de la función por intervalos:

	(-∞ , 0)	(0 , 1)	(1, 2)	(2 , ∞)
X^2-2x	+	-	-	+
$(x-1)^2$	+	+	+	+
f´(x)	+	-	-	+

La función crece: (-∞, 0)U (2, ∞)
La función decrece: (0, 1)U(1,2)

Por lo que se obtiene un máximo en x=0 y un mínimo en x=2
Máximo relativo: (0,0)
Mínimo relativo: (2 , 4)



c)

$$\int_2^3 \frac{x^2}{x-1} - x - 1dx \rightarrow \int_2^3 x + 1 + \frac{1}{x-1} - x - 1dx \rightarrow [Ln(x-1)]_2^3 = Ln2 - Ln1$$
$$= Ln2\, u^2$$

Problema nº3

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que P(A) = 0; 5; P(B) = 0; 4; P(A \ B) = 0; 1. Calcúlense las siguientes probabilidades:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(AUB) \rightarrow P(AUB) = 0{,}8$$

$$P(\bar{A}U\bar{B}) = 1 - P(A \cap B) = 0\,9$$

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = 0{,}25$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3$$

Problema nº4

a)

Para calcular el intervalo de confianza se utilizara la siguiente ecuación:

$$(\bar{x} - Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

El valor de $Z_{\propto/2}$ se calcula mediante el nivel de confianza.

0,95=1-$\propto \rightarrow \propto = 0{,}05$

$$1 - \frac{0{,}05}{2} = 0{,}975$$

Se obtiene que el valor de $Z_{\propto/2}$ mediante las tablas de la distribución normal es de 1,96, por lo que intervalo de confianza es:

$$\left(19.84 - 1.96\frac{0.5}{\sqrt{4}}; 19.84 + 1.96\frac{0{,}5}{\sqrt{4}}\right)$$

$$(19{,}35\ , 20{,}33)$$

b)

$$E = Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow n = (Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{E})^2$$

$$n = \left(1.96 \cdot \frac{0.5}{0.2}\right)^2 = 24{,}01$$

N=25

OPCION B

Problema nº1

a)

1º Se escribe la matriz A y la matriz A*

$$A = \begin{pmatrix} k & -2 & 7 \\ 1 & -1 & k \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} k & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & k & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2º Se calcula el valor de a que hace al determinante A=0

$$|A| = -k^2 + k + 2 = 0 \Rightarrow k = -1; k = 2$$

Discusión del sistema:

$Si\ k \neq -1{,}2 \Rightarrow rango(A) = 3 \Rightarrow SCD$

$Si\ k = -1$

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$Rango(A^*) = 3 \neq rango(A) = 2 \Rightarrow SI$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$Si\ k = 2$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Todos\ los\ menores\ de\ orden\ 3\ son\ 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$rango(A^*)2 = rango(A) \Rightarrow SCI$$

b)

$$\begin{cases} 2x-2y+7z=8 \\ x-y+2z=2 \\ -x+y+z=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-2y+7z=8 \\ x-y+2z=2 \end{cases}$$

$$y=\alpha$$

$$\begin{cases} 2x+7z=8+2\propto \\ x+2z=2+\propto \end{cases} X=\frac{\begin{vmatrix} 8+2\propto & 7 \\ 2+\propto & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{2-3\propto}{-3}$$

$$Z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 8+2\propto \\ 1 & 2+\propto \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$$

c)

Este sistema de ecuaciones se resolverá por el método de Cramer:

$$\begin{cases} -2y+7z=8 \\ x-y+=2 \\ -x+y+z=2 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \quad 2$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = 12$$

$$y = \frac{|A_Y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 8 & 7 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = 10$$

$$z = \frac{|A_Z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-2} = 4$$

Problema nº2

a)

Para que una función por partes sea continua los valores de f en la discontinuidad deben ser los mismos.

$$\lim_{x\to 1^-} -x^2 - x + a = -2 + a$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{3}{bx} = \frac{3}{b}$$

f(1)=-2+a

-2+a=3/b

Para comprobar si una función es derivable se tiene que derivar y comprobar que los limites en el punto de discontinuidad de esa derivada son iguales.

$$f'(x)\begin{cases} -2x-1 & si\ x<1 \\ -\dfrac{3}{bx^2} & si\ x>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} -2x-1=-3$$
$$\lim_{x\to 1^+} -\frac{3}{bx^2}=-\frac{3}{b}$$

-3/b=-3

Se realizan las 2 igualdades y se obtiene que b=1 y que a=5.

b)

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-x+6 & x<1 \\ \dfrac{4}{x} & x>1 \end{cases}$$

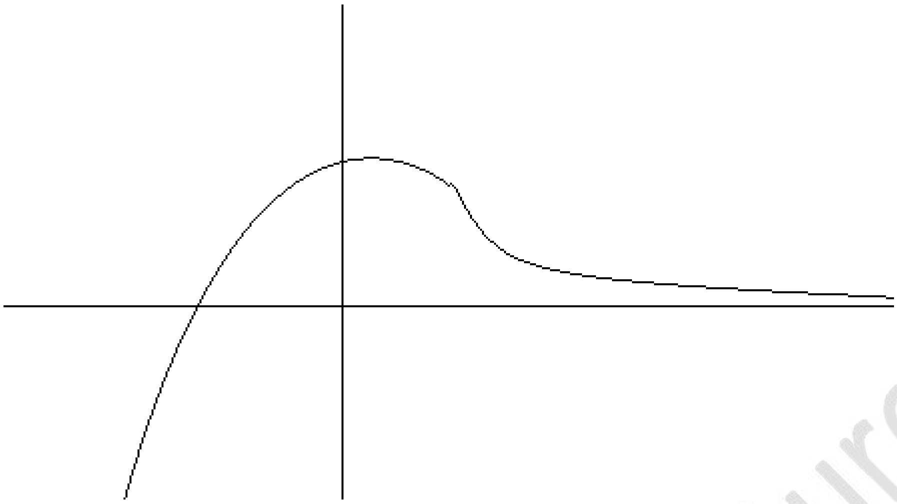
Para x=0 solo se podrá utilizar la primera función:
$f(0)=-0^2-0+6=6$

(0,6)

Para y=0 solo se utiliza la primera función ya que la segunda nunca dará cero:

$$0=-x^2-x+6 \rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{-2}=\frac{1\pm 5}{-2}\rightarrow x=\begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

(-3,0)



c)

$$A=\int_{-3}^{1}(-x^2-x+6)\,dx+\int_{1}^{2}\frac{4}{x}dx=\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+6x\right)\Big|_{-3}^{1}+4ln|x||_1^2=$$

$$-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+6-\left(9-\frac{9}{2}-18\right)+4\,ln\,2=\frac{56}{3}+4\,ln\,2\ u^2$$

Problema nº3

$$P(algun\ 6)=1-P(ningun\ 6)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^6=0{,}6651$$

$$P(6,\bar{6},\bar{6},\bar{6},\bar{6},6)=\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4=0{,}013$$

Problema nº4

a)

El intervalo de confianza para la media a partir de la media de las muestras es:

$$(\bar{x} - Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

El valor de $Z_{\propto/2}$ se calcula mediante el nivel de confianza.

0,95=1-∝→∝= 0,05

$$1 - \frac{0,05}{2} = 0,975$$

Se obtiene que el valor de $Z_{\propto/2}$ mediante las tablas de la distribución normal es de 1,96, por lo que intervalo de confianza es:

$$\left(6 - 1.96 \cdot \frac{0.5}{\sqrt{100}}; 6 + 1.96 \cdot \frac{0.5}{\sqrt{100}}\right)$$

$$(5,902 \,, 6,098)$$

b)

$$E = \left(Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \to n = \left(Z_{\propto/2}\frac{\sigma}{\bar{x}}\right)^2$$

$$n = \left(1.96 \cdot \frac{0.5}{0.5}\right)^2 \approx 4$$