UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

Curso **2019-2020**

MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

SOLUCIÓN

A.1. (2 puntos)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

a) Determine los valores del parámetro a para los que se verifica la igualdad $A^2 - 5A = -I$, donde I es la matriz identidad.

b) Calcule A^{-1} para $a = -1$.

Ejercicio A.1.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 2 & 5a \\ a & 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4+5a^2 & 25a \\ 5a & 5a^2+9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 25a \\ 5a & 15 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -6+5a^2 & 0 \\ 0 & -6+5a^2 \end{pmatrix}}_{A\cdot A-5A} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{B\cdot C}$$

$$\Longrightarrow \quad a^2 = 1 \Longrightarrow a = \pm 1$$

b) $A^2 - 5A = -I$; $-A^2 + 5A = I$, $A(-A+5I) = I$ *La inversa de A es* $-A+5I$

$-\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

A.2. (2 puntos)

Un vivero elabora dos tipos de sustratos. Para elaborar 1 m^3 del tipo A necesita 60 kg de tierra vegetal y 30 horas de trabajo. Para elaborar 1 m^3 del tipo B necesita 50 kg de tierra vegetal y 50 horas de trabajo. El vivero dispone como máximo de 21000 kg de tierra vegetal y 15000 horas de trabajo. Además, la cantidad de metros cúbicos que elabora de tipo A debe ser como mucho cinco veces la cantidad de tipo B. Por la venta de cada metro cúbico de tipo A obtiene un beneficio de 50 e y 60 e por cada metro cúbico de tipo B.

a) Represente la región del plano determinada por las restricciones anteriores y determine las coordenadas desus vértices.

b) Determine cuántos metros cúbicos de cada tipo deben elaborarse para, respetando las restriccionesanteriores, maximizar el beneficio. Obtenga el valor del beneficio máximo.

Maximizar:

Sea x la cantidad de m^3 de sustratos de tipo A e y la cantidad de m^3 de sustratos de tipo B

$Max\ z = 50x + 60y$

sa

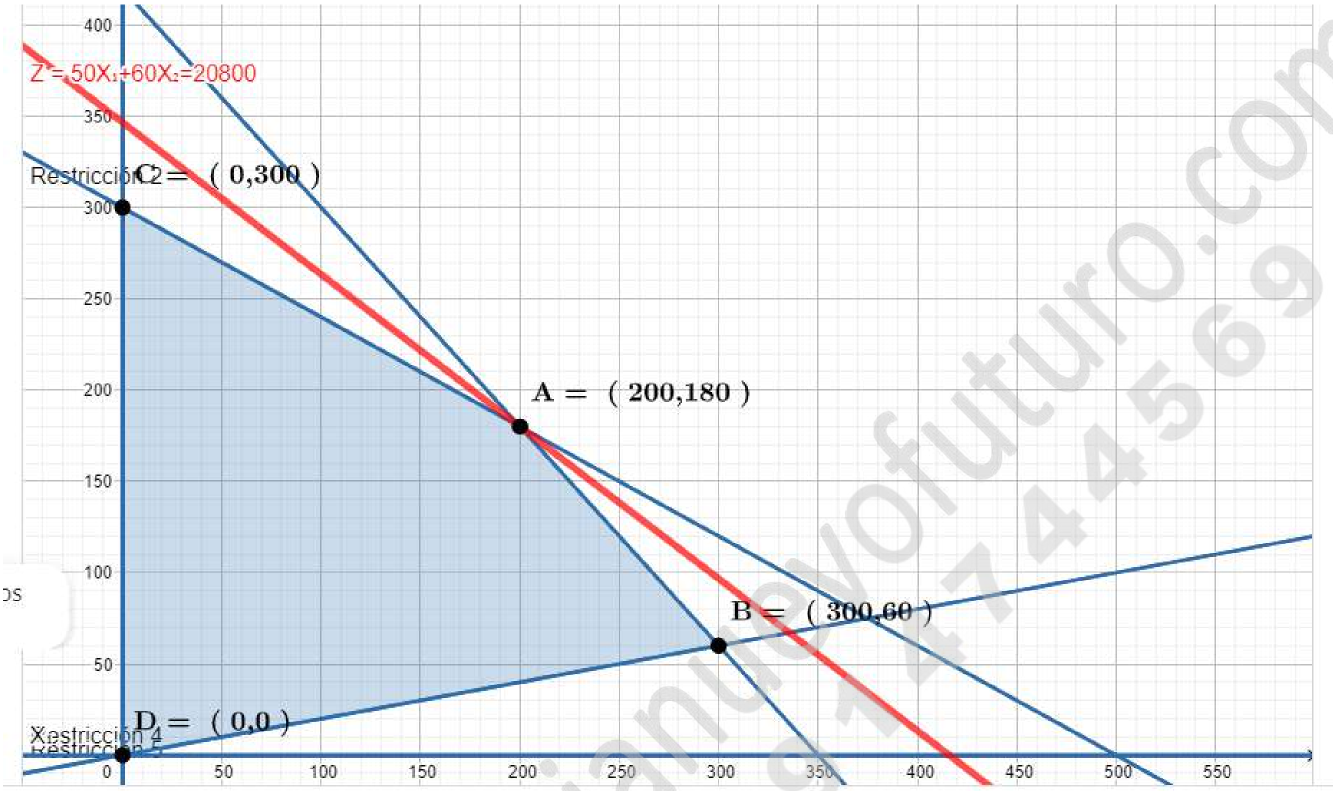
$60x + 50y \leq 21000;\ 6x + 5y \leq 2100$

$30x + 50y \leq 15000;\ 3x + 5y \leq 1500$

$x \leq 5y$

$x \geq 0,$

$y \geq 0$



Entonces:

con vértices $A = (200{,}180)$, $B = (300{,}60)$, $C = (0{,}300)$ y $D = (0{,}0)$.

Evaluamos la función coste en los vértices de la región factible obtenidos:

- z(300,60) = 18600.
- z(200,180) = 20800 ⇒ Máximo
- z(0,300) = 18000
- z(0,0) = 0

El máximo beneficio es 20800 euros y se obtiene elaborando 200 m^3 de sustratos de tipo A y 180 m^3 de sustratos de tipo B.

A.3. (2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6x}{2x^2+1} & \text{si } x < 1 \\ 2m + \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Estudie los valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$ y calcule la derivada de la función para $x < 1$.
b) Halle el área de la región del plano limitada por la curva $y = f(x)$, las rectas $x = -1$ y $x = 0$ y el eje $0X$.

a) Para que la función sea continua en $x = 1$ necesitamos que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2x^2+1} = 2$$

coincida con

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(2m + \ln x) = 2m.$$

Y también coincida con f(1)=2m

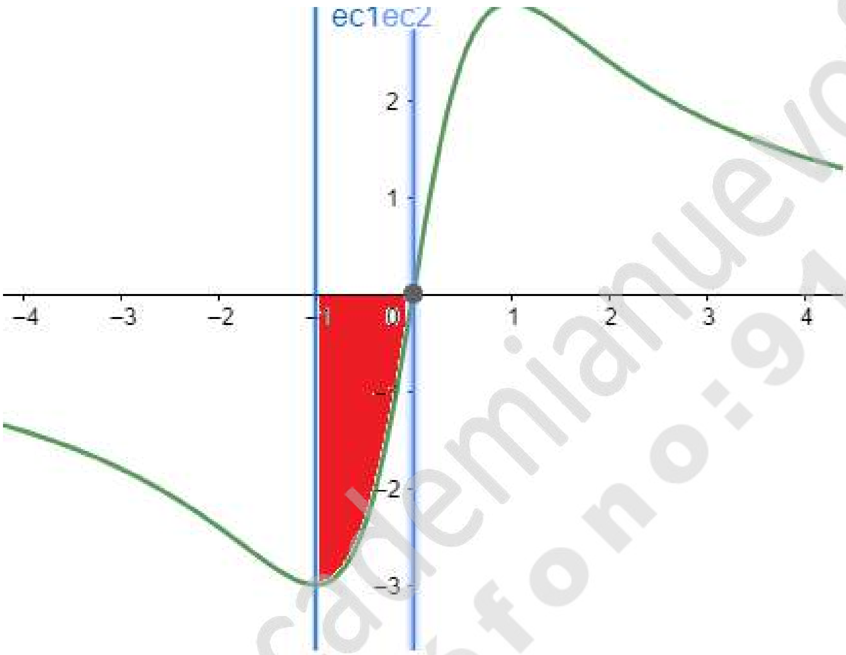
2m=2; m=1

Concluimos que $m = 1$ para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$.

b) La derivada si x<1

$$f'_{(x)} = \frac{6(2x^2+1) - y_x \cdot 6x}{(2x^2+1)^2} = \frac{12x^2+6-2y_x^2}{(2x^2+1)^2} = \frac{-12x^2+6}{(2x^2+1)^2}$$

c)



Puesto que las función es negativa en el intervalo $[-1,0]$, el área es
$-\int_{-1}^{0} \frac{6x}{2x^2+1} dx = -\frac{6}{4}\int_{-1}^{0} \frac{4x}{2x^2+1} dx = \frac{-3}{2} ln(2x^2+1) I_{-1}^{0} = \frac{-3}{2} ln(1) + \frac{3}{2}\ln(3) = \frac{3}{2}\ln(3)\, u^2$

A.4. (2 puntos)

Sean A y B sucesos de un experimento aleatorio tales que: $P(A|B) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{6}$ y $P(A) = \frac{2}{3}$. Calcule:

a) $P(A \cup \overline{B})$.

b) $P((\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A))$.

Nota: $\overline{S}$ *denota el suceso complementario del suceso* S.

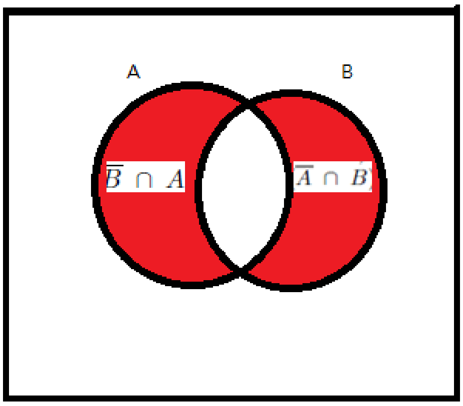
$$p(A/_B) = \frac{P(A\cap B)}{PB} \Rightarrow$$

$$P(A\cap B) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

a) $P(A \cup \overline{B}) = PA + P\overline{B} - P(A\cap \overline{B})$

$$P(A\cap\overline{B}) = PA - P(A\cap B)$$
$$P(A\cap\overline{B}) = \frac{2}{3}-\frac{1}{24}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$$
$$P(A\cup\overline{B}) = \frac{2}{3}+1-\frac{1}{6}-\frac{5}{8}=\frac{7}{8}$$

b)



La zona pedida como observamos en el dibujo es:

$$p(A\cup B)-p(A\cap B)=$$
$$= PA+PB-2P(A\cap B)=$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}-\frac{2}{24}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$$

A.5. (2 puntos)
El peso de una patata, en gramos (g), de una remesa que llega a un mercado se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 60$ g.
a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 20 g, con un nivel de confianza del 95 %.
b) Suponiendo que se selecciona una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 100$, calcule el valor de la media μ para que $P(\overline{X} \leq 220) = 0,9940$.

a)

$$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'96\frac{60}{\sqrt{n}} < 20 \Longrightarrow \sqrt{n} > 5'88 \Longrightarrow n \geq 35$$

b)

$$\bar{x}\sim N\left(\mu;\frac{60}{\sqrt{100}}\right);\ \bar{x}\sim N(\mu;6)$$

$$P(\overline{X}\leq 220) = P(\overline{Z}\leq\frac{220-\mu}{6}) = 0'9940 \Longrightarrow \frac{220-\mu}{6} = 2'51 \Longrightarrow \mu = 220-15'06 = 204'94$$

B.1. (2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{rcl} x - ay & = & 1 \\ ax - 4y - z & = & 2 \\ 2x + ay - z & = & a - 4 \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.
b) Resuelva el sistema para $a = 3$.

a)

La matriz de coeficientes del sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ a & -4 & -1 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 1 \\ a & -4 & -1 & 2 \\ 2 & a & -1 & a-4 \end{pmatrix}$$

Cuyo determinante es $|A| = -a^2 + 3a + 4 = 0$

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{-2} = \frac{-3 \pm 5}{-2}$$

a=-1 a=4

Si

$a \neq -1$ y $a \neq 4$ RA=RA*=n SCD

Si a=-1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \text{RA}=2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 20 + 4 + 1 + 8 - 5 + 2 \neq 0$$

RA*=3 Sistema incompatible

Si a=4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 4 & -4 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} A^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \text{RA}=2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 + 16 + 8 - 8 = 0$$

Todos los determinantes de tamaño 3 de la ampliada valen 0.

RA*=2 Sistema compatible indeterminado

$$\begin{cases} x-3y=1 \\ 3x-4y-z=2 \\ 2x+3y-z=-1 \end{cases}$$

b) Para $a = 3$ el sistema es compatible determinado. Resulta:

Aplicando por ejemplo el método de Cramer o el de Gauss obtenemos que la solución es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{4}=\frac{-1}{2}; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{4}=\frac{-1}{2}; \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{4}=\frac{-3}{2}$$

B.2. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{ax^2-3}{x^2-5}$$

a) Calcule el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ tenga una asíntota horizontal en $y=-1$.
b) Para $a=1$, halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y los extremos relativos, si existen.

Dominio de f es el conjunto R − $\{x : x^2 - 5 = 0\}$ = R − $\{\pm\sqrt{5}\}$

a) Para que f tenga una asíntota horizontal en $y = -1$ se debe cumplir que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

Como

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2-3}{x^2-5}=a=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^2-3}{x^2-5}$$

Se sigue que $a = -1$

b) para $a = 1$ tenemos que

$$f'_{(x)}=\frac{2x(x^2-5)-2x(x^2-3)}{(x^2-5)^2}=\frac{2x^3-10x-2x^3+6x}{(x^2-5)^2}=\frac{-4x}{(x^2-5)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-4x}{(x^2-5)^2}=0 \Longrightarrow f'(x)=0 \Longrightarrow x=0$$

Mirando ahora el signo de la derivada

$(-\infty,-\sqrt{5})\cup(-\sqrt{5},0)$ la derivada es positiva y por tanto la función creciente.

- En $(0,\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},\infty)$ la derivada es negativa y por tanto la función es decreciente.
- En $x = 0$ hay un máximo.

- f(0)=$\frac{3}{5}$
- Máximo$\left(0,\frac{3}{5}\right)$

Ejercicio B.**3.**

a) Calculamos la derivada

$$f^{1}_{(x)} = 2e^{2x} + 1 \Rightarrow f'_{(0)} = 3 \Rightarrow f(0) = 1$$
$$y - 1 = 3(x - 0) \Rightarrow y = 3x + 1$$

b)

$$\int_0^1 (e^{2x} + x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\,dx + \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 0 = \frac{e^2}{2}$$

B.4. (2 puntos)
En un instituto se decide que los alumnos y alumnas solo pueden utilizar un único color (azul o negro) al realizar los exámenes. Dos de cada tres exámenes están escritos en azul. La probabilidad de que un examen escrito en azul sea de una alumna es de $0,7$. La probabilidad de que un examen esté escrito en negro y sea de un alumno es $0,2$. Se elige un examen al azar. Determine la probabilidad de que

a) Sea el examen de un alumno.
b) Sabiendo que está escrito en negro, sea de un alumno.

$PAz = \frac{2}{3}$ — $P(O/Az) = 0,3$; $P(A/Az) = 0,7$

$PN = \frac{1}{3}$ — $P(O/N) = x$; $P(A/N) = 1-x$

b)$\boldsymbol{p(N \cap O) = PN \cdot p\left({}^{O}/_{N}\right)}$

0,2=$\boldsymbol{\frac{1}{3} \cdot p\left({}^{O}/_{N}\right)}$

$\boldsymbol{p\left({}^{O}/_{N}\right) = 0,6}$

a)$\boldsymbol{PO = PAz \cdot p\left({}^{O}/_{Az}\right) + PN \cdot p\left({}^{O}/_{N}\right) = \frac{2}{3} \cdot 0,3 + \frac{1}{3} \cdot 0,6 = 0,4}$

Ejercicio B.**5.**

B.5. (2 puntos)
Una persona se ha propuesto salir a caminar todos los días realizando el mismo recorrido y cronometrando el tiempo que tarda en completarlo. El tiempo que está caminando por este recorrido puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal cuya desviación típica es 10 minutos.

a) Utilizando la información de una muestra aleatoria simple, se ha obtenido el intervalo de confianza $(26.9,\ 37.1)$, expresado en minutos, para estimar el tiempo medio que tarda en realizar el recorrido, μ, con un nivel de confianza del 98,92 %. Obtenga el tamaño de la muestra elegida y el valor de la media muestral.
b) Si el tiempo medio para completar el recorrido es $\mu = 30$ minutos, calcule la probabilidad de que, en una muestra de 16 días elegidos al azar, esta persona tarde entre 25 y 35 minutos de media para completar el recorrido.

$$\begin{cases} 26{,}9 = \bar{x} - E \\ 37{,}1 = \bar{x} + E \end{cases}$$

Resolviendo el sistema: $\bar{x} = 32$

E=5,1

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 2'55\frac{10}{\sqrt{n}} = 5'1 \Longrightarrow n = \left(\frac{25'5}{5'1}\right)^2 = 25$$

b)

$$X \sim N(30, 10) \Longrightarrow \overline{X} \sim N(30, 2'5) \Leftrightarrow Z = \frac{\overline{X} - 30}{2'5} \sim N(0, 1)$$

$$P(25 \leq \overline{X} \leq 35) = P(-2 \leq Z \leq 2) = 2P(Z \leq 2) - 1 = 0{,}9544$$