matemáticas aplicadas ciencias sociales selectividad VAU extraordinaria julio 2021 solución

A.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A tiene inversa.
b) Para $a = 2$ calcule, si existe, la matriz X que satisface $AX = B$.

a)

$$[A] = -2a + a + 1 = 0$$

$$Si\ a \neq 1\ existe A^{-1}$$

b)AX=B

$$A^{-1}AX = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Adjunta traspuesta:

$$Adj(A)^T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Determinante de la matriz:

$$det(A) = -3$$

Inversa de A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-4}{3} & \frac{-5}{3} \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

A 2. (Calificación máxima: 2 puntos).
Una empresa tecnológica se plantea la producción y lanzamiento de dos nuevos cables de fibra óptica, el modelo A2020 y el modelo B2020. El coste de producir un metro del modelo A2020 es igual a 2 euros, mientras que el coste de producir un metro del modelo B2020 es igual a $0,5$ euros . Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6000 metros de cable, aunque del modelo B2020 no podrán fabricarse más de 5000 metros y debido al coste de producción no es posible fabricar más de 8000 metros entre los dos modelos. Además se desea fabricar una cantidad de metros del modelo B2020 mayor o igual a la de metros del modelo A2020.

a) Represente la región factible y calcule las coordenadas de sus vértices.
b) Determine el número de metros que deben producirse de cada uno de los modelos para minimizar el coste.

Sean x e y el número de metros de el modelo A2020 y B2020

Min 2x+0,5y

Sa

$x+y\geq 6000$

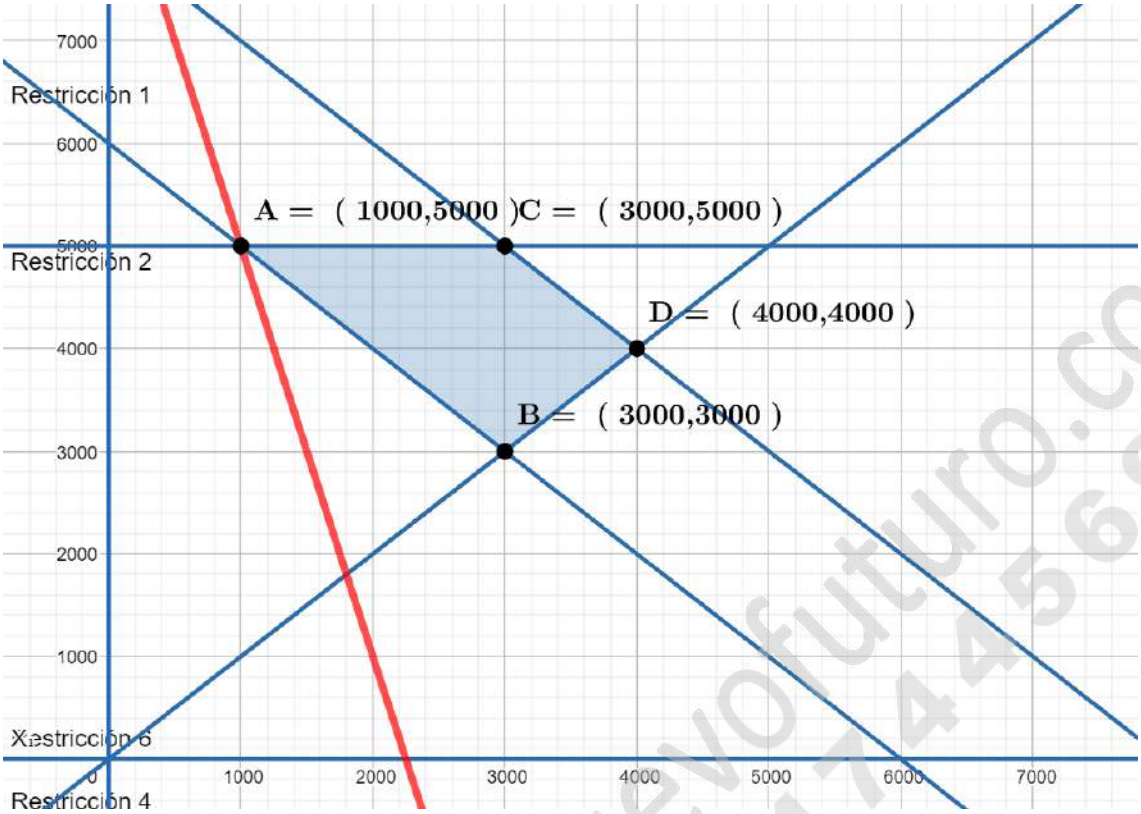
$y\leq 5000$

$x+y\leq 8000$

$y\geq x$

$x\geq 0$

$y\geq 0$



X+y=8000

X=y

2y=8000

Y=4000

X=4000

A(4000,4000)

X+y=6000

X=y

2y=6000

Y=3000

B(3000,3000)

X+y=8000

Y=5000

X=8000-5000=3000

C(3000,5000)

X+y=6000

Y=5000

X=6000-5000=1000

D (1000,5000)

Punto	Coordenadas (X_1,X_2)	Valor de la Función Objetivo $2X_1+ 1/2X_2$
A	(1000,5000)	2(1000)+ 1/2(5000) = 4500
B	(3000,3000)	2(3000)+ 1/2(3000) = 7500
C	(3000,5000)	2(3000)+ 1/2(5000) = 8500
D	(4000,4000)	2(4000)+ 1/2(4000) = 10000

A 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & si \quad x \leq 3 \\ \dfrac{3a}{x} & si \quad x > 3 \end{cases}$$

a) Determine el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en todo su dominio. ¿Para ese valor de a es $f(x)$ derivable?
b) Para $a = 1$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Si x<3 f(x) es continua por ser un polinomio

Six>3 f(x) es continua por ser una racional con denominador distinto de 0

En x=3

f(3)=3^2-3-1=9-4=5

$$\lim_{x\to 3^-} x^2 - 3x - 1 = 5$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{3a}{x} = \frac{3a}{3} = a$$

a=5

para a =5 la función es continua.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 3 \\ -\dfrac{15}{x^2} & x > 3 \end{cases}$$

f´(3^-)=2·3-1=5

f´(3^+)=$-\frac{15}{3^2} = -\frac{15}{9} = -\frac{5}{3}$

La función no es derivable en x=3

b)

La ecuación de la recta tangente es

y-f(1)=f´(1)(x-1)

f(1)=1^2-1-1=-1

f´(1)=2·1-1=1

y-(-1)= (x-1)

y+1=x-1

y=x-2

A 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que $P(A) = 0,5$, $P(\overline{B}) = 0,8$ y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,9$

a) Estudie si los sucesos A y B son independientes.
b) Calcule $P(\overline{A}|\overline{B})$.

a)

$$P\bar{B} = 1 - P\bar{B} = 1 - 0,8 = 0,2$$

$$P(A \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B)$$

$$0,9 = 1 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0,1$$

Si $P(A \cap B) = PA \cdot PB$ entonces A y B son independientes.

0,1=0,5·0,2

A y B son independientes.

b)

$$P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P\bar{B}} = \frac{1 - P(A \cup B)}{0,8} = \frac{1 - [PA + PB - P(A \cap B)]}{0,8} = \frac{1 - [0,5 + 0,2 - 0,1]}{0,8} = \frac{0,4}{0,8} = 0,5$$

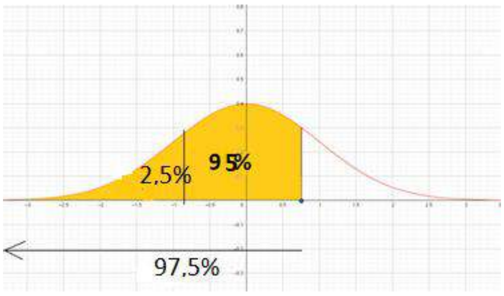
A 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El peso de los huevos producidos en una granja avícola se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ gramos y desviación típica $\sigma = 8$ gramos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 huevos, obteniéndose una media muestral de 60 gramos. Determine un intervalo de confianza al $95\,\%$ para μ.
b) Suponga que $\mu = 59$ gramos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 huevos, la media muestral, $\overline{X}$, esté comprendida entre 57 y 61 gramos.

a)

$$\bar{x} \sim N(59; 2,53)$$

$$\left(\overline{x} - Z\alpha_{/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + Z\alpha_{/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$



El valor de la tabla que deja a su izquierda un 97,5% de probabilidad es $z_{\propto/2} = 1,96$

$$\left(8 - 1,96 \cdot \frac{60}{\sqrt{20}}, 8 + 1,96 \cdot \frac{60}{\sqrt{20}}\right) = (56,5; 63,5)$$

b)

$$\bar{x} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\bar{x} \sim N\left(59; \frac{8}{\sqrt{10}}\right) = P(57 < \bar{x} < 61) = P\left(\frac{57-59}{2,53} < z < \frac{61-59}{2,53}\right) =$$

$$P(-0,79 < z < 0,79) = P(z < 0,79) - P(z < -0,79) = 0,7852 - (1 - 0,7852) = 0,5704$$

B 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{rl} x + 2ay + z & = 0 \\ -x - ay & = 1 \\ -y - z & = -a \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.
b) Resuelva el sistema para $a = 3$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 1 \\ -1 & -a & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -a \end{pmatrix}$$

$$|A| = a + 1 - 2a = 0$$

a=1

si $a \neq 1$ $RA = RA^* = n$ SCD

Si a=1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0$$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$RA=2

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 + 2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$$

Todos los determinantes de tamaño 3 de la ampliada dan 0 RA*=2

Si a=1 SCI

b)

x+6y+z=0

-x-3y=1

-y-z=-3

El determinante de la matriz de coeficientes es

$$|A| = -2 \neq 0$$

Por tanto, podemos aplicar Cramer.

Calculamos x:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} =$$

$$= \frac{-4}{-2} =$$

$$= 2$$

Calculamos y:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} =$$

$$= \frac{2}{-2} =$$

$$= -1$$

Calculamos z:

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{|A|} =$$

$$= \frac{-8}{-2} =$$

$$= 4$$

B 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{aligned} x + 2ay + z &= 0 \\ -x - ay &= 1 \\ -y - z &= -a \end{aligned}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.
b) Resuelva el sistema para $a = 3$.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 1 \\ -1 & -a & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1-a \end{pmatrix}$$

$$|A| = a + 1 - 2a = 0$$

a=1

Si $a \neq 1$RA=RA*=3 SCD

Si a=1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \neq 0 \; RA = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 + 2 = 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$$

RA*=2=RA=2 SCI

b)

x +6y +z=0

-x-3y=1

-y-z=-3

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 1 - 6 = -2$$

Por tanto, podemos aplicar Cramer.

Calculamos x:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} =$$

$$= \frac{-4}{-2} =$$

$$= 2$$

Calculamos y:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} =$$

$$= \frac{2}{-2} =$$

$$= -1$$

Calculamos z:

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{|A|} =$$

$$= \frac{-8}{-2} =$$

$$= 4$$

B 2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$

a) Calcule el dominio y las asíntotas de $f(x)$.
b) Determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a)

$$(x-1)^2 = 0$$

x-1=0

x=1

Dominio $R - \{1\}$

Asíntota vertical:

X=1

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=-\infty$$

Asíntota vertical x=1

Asíntota horizontal:

$$y=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua

Y=mx+n

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$
$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)$$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}:x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2}{x^2-2x+1}:x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2}{x^3-2x^2+x}=\frac{1}{1}=1$$

n= $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2}{x^2-2x+1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2-(x^3-2x^2+x)}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2-x^3+2x^2-x}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2-2x+1}=0$

y=x

b)

$$y'=\frac{(3x^2-4x)(x-1)^2-2(x-1)(x^3-2x^2)}{(x-1)^4}=$$

Y´= $\frac{(x-1)\left[(3x^2-4x)(x-1)-2(x^3-2x^2)\right]}{(x-1)^4}=\frac{(3x^2-4x)(x-1)-2(x^3-2x^2)}{(x-1)^3}$

$$y'=\frac{3x^3-3x^2-4x^2+4x-2x^3+4x^2}{(x-1)^3}=\frac{x^3-3x^2+4x}{(x-1)^3}=0$$

$$x^3-3x^2+4x=0$$

$$x\left(x^2-3x+4\right)=0$$

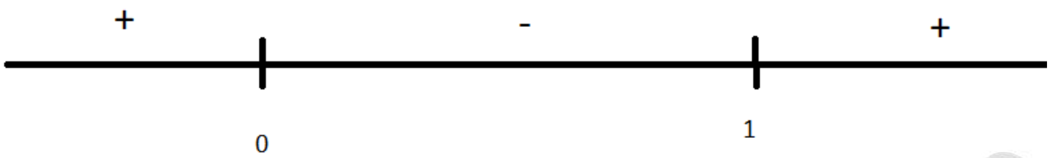
X=0

$x^2-3x+4=0$ Sin solución

y´(-1)>0

y´(1/2)<0

y´(2)>0



$(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ Creciente

(0,1)Decreciente.

B 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se sabe que la derivada de una función real $f(x)$ de variable real es:

$$f'(x) = 3x^2 + 8x$$

a) Determine la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(1) = 11$.
b) Determine los máximos y mínimos locales de $f(x)$, si los hubiera.

a) f(x)=$\int (3x^2 + 8x)\,dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} + C = x^3 + 4x^2 + C$

f(1)=$1^3+4\cdot1^2$+C=11

C=11-5=6

f(x)= $x^3 + 4x^2 + 6$

b)f´(x)= $3x^2+8x=0$

x·(3x+8)=0

Posibles máximos o mínmos:

x=0

x=-8/3

f´´(x)=6x+8

f´´(0)=6·0+8=8>0 Mínimo

f´´(-8/3)=6·(-8/3)+8=-8<0 Máximo

f(0)= $0^3 + 4 \cdot 0^2 + 6 = 6$

Mínimo (0,6)

$$f\left(-\frac{8}{3}\right) = \left(-\frac{8}{3}\right)^3 + 4\left(-\frac{8}{3}\right)^2 + 6 = -\frac{512}{27} + 4\cdot\frac{64}{9} + 6 = \frac{418}{27}$$

Máximo $\left(-\frac{8}{3}, \frac{418}{27}\right)$

B 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Un colegio tiene alumnos matriculados que residen en dos municipios distintos, A y B, siendo el número de alumnos matriculados residentes en el municipio A el doble de los del municipio B. Se sabe que la probabilidad de fracaso escolar si se habita en el municipio A es de $0,02$, mientras que esa probabilidad si se habita en el municipio B es de $0,06$. Calcule la probabilidad de que un alumno de dicho colegio elegido al azar:

a) No sufra fracaso escolar.
b) Sea del municipio A si se sabe que ha sufrido fracaso escolar.

PA+PB=1

PA=2PB

2PB+PB=1

3PB=1

PB=1/3

PA=2/3

$PA=\frac{2}{3}$ → $P(F/A)=0,02$; $P(\bar{F}/A)=0,98$

$PB=\frac{1}{3}$ → $P(F/B)=0,06$; $P(\bar{F}/B)=0,94$

a)

$$P(\bar{F}) = \frac{2}{3}\cdot 0,98 + \frac{1}{3}\cdot 0,94 = 0,97$$

b) $P\left({}^{A}/_{F}\right) = \frac{P(A\cap F)}{PF} = \frac{\frac{2}{3}\cdot 0,02}{1-0,97} = 0,44$

B 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ minutos y desviación típica $\sigma = 3$ minutos.

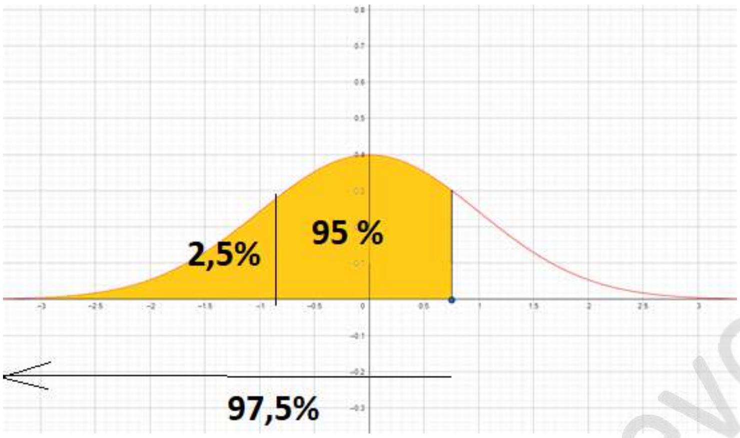
a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del $95\,\%$.
b) Suponga que $\mu = 32$ minutos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ pruebas, el tiempo medio empleado en su realización, $\overline{X}$, sea menor que $30,5$ minutos.

a) $\bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)$

$$\bar{X} \sim N\left(32; \frac{3}{\sqrt{16}}\right)$$

$$\bar{X} \sim N(32; 0{,}75)$$

$$P(\bar{X} < 30{,}5) = P\left(z < \frac{30{,}5 - 32}{0{,}75}\right) = P\left(z < \frac{30{,}5 - 32}{0{,}75}\right) = P(z < -2) = 1 - P(z < 2)$$
$$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$



Buscando en la tabla 0,975

$z_{\propto/2}$=1,96

$$E = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = \frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \Rightarrow \left(\sqrt{n}\right)^2 = \left(\frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2$$

$$n = \left(\frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1{,}96 \cdot 3}{1}\right)^2 = 34{,}57$$

n=35 test