OPCIÓN A

Pregunta 1

a)

Como es campo gravitatorio es conservativo, la energía mecánica se conserva y será la misma la de la superficie que la del infinito

$$E_{mecánica}(superficie) = E_{mecánica}(\infty)$$

$$E_c(superficie) + E_p(superficie) = E_c(\infty) + E_p(\infty)$$

Ahora bien si calculamos estas energías podemos ver:

$$v_\infty = 0 \Rightarrow E_c(\infty) = 0$$

$$r = \infty \Rightarrow E_p(\infty) = 0$$

Si llamamos v_e a la velocidad de escape, ésta cumplirá:

$$\frac{1}{2}mv_e^2 + \left(-G\frac{Mm}{R}\right) = 0 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Con el dato de la densidad conseguimos la masa del planeta:

$$d = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow M = \frac{4}{3}\pi R^3 d$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2G\frac{4}{3}\pi R^3 d}{R}} = \sqrt{\frac{8}{3}\pi G \cdot d \cdot R^2} = \sqrt{\frac{8}{3}\pi 6.67 \cdot 10^{-11} 3000.3000^2} = 3.88\, {}^{m}/_{s}$$

La velocidad de escape es $3.88\, {}^{m}/_{s}$

b) Teniendo en cuenta la conservación de la energía:

$$E_{mecánica}(\infty) = E_{mecánica}(h = 1000m)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{Mm}{R+h}\right) = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2GM}{R+h}}$$

$$d = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow M = \frac{4}{3}\pi R^3 d$$

$$v = \sqrt{\frac{2G\frac{4}{3}\pi R^3 d}{R+h}} == \sqrt{\frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11}\frac{4}{3}\pi \cdot 3000 \cdot (3000)^3}{3000 + 1000}} = 3.36\, {}^{m}/_{s}$$

La velocidad a 1000 m es $3.36\,{}^{m}/_{s}$

Pregunta 2

a) El nivel de intensidad sonora viene dada por:

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_0}$$

La intensidad de una onda suponiendo superficie esférica se calcula con:

$$I = \frac{W}{S} = \frac{W}{4\pi r^2} = \frac{10^{-3}}{4\pi 10^2} = 7.96\cdot 10^{-7}\,\frac{W}{m^2}$$

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_0} = 10\,\log\frac{7.96\cdot 10^{-7}}{10^{-12}} = 59dB$$

La intensidad es $59dB$

b) Suponiendo ondas con igual longitud de onda, frecuencia y amplitud, con fases iguales o con diferencia constante, la intensidad de la onda resultante en un punto será la suma de las intensidades:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{W_1}{S_1} + \frac{W_2}{S_2} = \frac{W_1}{4\pi r_1^2} + \frac{W_2}{4\pi r_2^2}$$

Calculado en el punto medio:

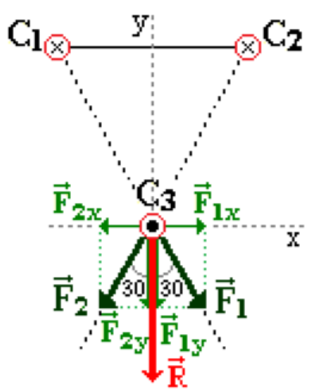
$$r_1 = r_2 = \frac{30}{2} = 15m$$

$$I = \frac{10^{-3}}{4\pi 15^2} + \frac{2\cdot 10^{-3}}{4\pi 15^2} = 1.06\cdot 10^{-6}\,{}^{W}/_{m^2}$$

La intensidad es $1.06\cdot 10^{-6}\,{}^{W}/_{m^2}$

Pregunta 3

a) Según la ley de Ampere, dos conductores paralelos e indefinidos por los que circulan corrientes contrarias, se repelen. Entonces, la fuerza sometida sobre el hilo 3 es la mostrada en la figura



La fuerza con la que se repelen viene dada por:

$$\vec{F} = I\cdot(\vec{\ell}x\vec{B})$$

Como B y I son perpendiculares:

$$\left|\vec{F}\right| = I \cdot \ell \cdot B sen\, 90° = I \cdot \ell \cdot B$$

Según la ley de Biot y Savart, el campo magnético creado por un hilo conductor:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

Como las intensidades son iguales y las distancias también:

$$F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_3}{2\pi d}\ell = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}\ell F_2 = \frac{\mu_0 I_2 I_3}{2\pi d}\ell = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}\ell$$

Cada uno de los ángulos del triángulo formado por la disposición de los hilos es de 60º, mediante las razones trigonométricas, obtenemos las componentes de cada una de las fuerzas que provocan los hilos 1 y 2 sobre 3

$$F_1 \begin{cases} F_{1x} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}\ell \cdot sen\, 30° \\ F_{1y} = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}\ell \cdot cos\, 30° \end{cases} \quad F_2 \begin{cases} F_{2x} = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}\ell \cdot sen\, 30° \\ F_{2y} = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}\ell \cdot cos\, 30° \end{cases}$$

$$F_T \begin{cases} F_{1x} + F_{2x} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}\ell \cdot sen\, 30° - \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}\ell \cdot sen\, 30° = 0 \\ F_{1y} + F_{2y} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}\ell \cdot cos\, 30° = -2\frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}\ell \cdot cos\, 30° \end{cases}$$

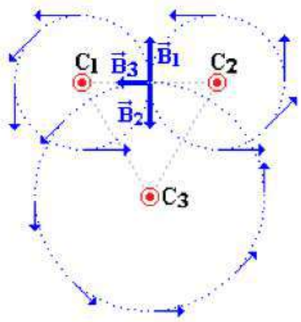
$$\frac{F_T}{\ell} = \frac{-2\frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}\ell \cdot \cos 30°}{\ell} = -\frac{\mu_0 I^2}{\pi d} cos\, 30° = -\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5^2}{\pi \cdot 10 \cdot 10^{-2}} =$$
$$= -5\sqrt{3} \cdot 10^{-5}\frac{N}{m}(sentido\ negativo\ de\ y)$$

La fuerza por longitud es $-5\sqrt{3} \cdot 10^{-5}\frac{N}{m}$ en sentido negativo del eje OY

b) Por la regla de la mano derecha, determinamos la dirección y sentido de los campos creados por los hilos en el punto medio entre los hilos 1 y 2.

Al observar la situación, los campos creados por los hilos 1 y 2 son iguales pero de sentido contrario, por lo que se anulan entre sí. El campo resultante será el creado por el hilo 3.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$



La distancia es el punto medio entre el hilo 1 y 2

$$d = 0.1 \cdot sen\, 60° = 0.1\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.0866m$$

El campo creado es:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi d}\vec{i} = -\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}{2\pi \cdot 0.0866} = -1.15 \cdot 10^{-5}\vec{i}\,T$$

El campo creado en el punto medio es $1.15 \cdot 10^{-5}$T en sentido negativo del eje OX

Pregunta 4

a)

s=-1 cm

f'=2cm

Mediante la ecuación de las lentes, calculamos la posición de la imagen

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{2} + \frac{1}{-1} = \frac{-1}{2}$$

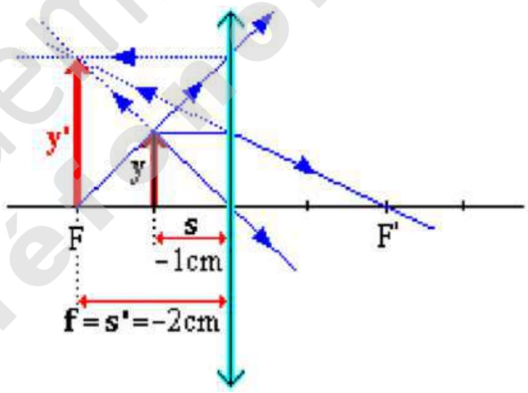
$$s' = -2cm\ (virtual)$$

El aumento lateral será:

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = \frac{-2}{-1} = 2 \Rightarrow y' = 2y$$

$$La\ imagen\ es\ doble\ en\ tamaño\ virtual\ y\ derecha$$

b)



Pregunta 5

a) El periodo de semidesintegración es el tiempo que tarda en reducir sus núcleos a la mitad

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t_{t/2}} \Rightarrow -\ln(2) = -\lambda t_{t/2} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln(2)}{t_{t/2}} = \frac{\ln(2)}{1588.69} =$$
$$= 4.36 \cdot 10^4\ años^{-1}$$

La contante es $4.36 \cdot 10^4\ años^{-1}$

b) Aplicando la ecuación fundamental:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow N_0 = \frac{N}{e^{-\lambda t}} = \frac{9.76 \cdot 10^{-16}}{e^{-4.36 \cdot 10^{-4} \cdot 200}} = 1.06 \cdot 10^{17}\ núcleos$$

Gracias al número de Avogrado:

$$m(Ra) = 1.06 \cdot 10^{17}\ núcleos \cdot \frac{1\ mol}{6.023 \cdot 10^{23}\ núcleos} = 4 \cdot 10^{-5} g$$

La masa inicial es $4 \cdot 10^{-5} g$

OPCIÓN B

Pregunta 1

a) Igualamos la fuerza gravitatoria al peso del cuerpo

$$\vec{F}_G = \vec{P} \Rightarrow G\frac{Mm}{R^2} = mg \Rightarrow g = G\frac{M}{R^2}$$

Donde M y R son la masa y el radio de la estrella

Con la relación que nos dan como dato entre masas y radios

$$\begin{cases} M = 0.12 M_S \\ R = 0.14 R_S \end{cases} \Rightarrow g = G\frac{0.12 M_S}{(0.14 R_S)^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{0.12 \cdot 1.99 \cdot 10^{30}}{(0.14 \cdot 7 \cdot 10^8)^2} = 1658.47\ {}^{m}/{}_{s^2}$$

La aceleración de la gravedad es $1658.47\ {}^{m}/{}_{s^2}$

b) Igualando la fuerza centrípeta con la fuerza gravitatoria:

$$G\frac{Mm}{r_{órbita}{}^2} = m\frac{v_{órbita}^2}{r_{órbita}} \Rightarrow v_{órbita} = \sqrt{\frac{GM}{r_{órbita}}}$$

Además sabemos que:

$$v_{órbita} = \omega \cdot r_{órbita} \begin{cases} \omega \cdot r_{órbita} = \sqrt{G\frac{Mm}{r_{órbita}}} \\ \omega = \frac{2\pi}{T} \end{cases} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} \cdot r_{órbita} = \sqrt{G\frac{Mm}{r_{órbita}}} \Rightarrow r_{órbita}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{GM}{4\pi^2}T^2} = \sqrt[3]{\frac{G \cdot 0.12 M_S}{4\pi^2} \cdot T^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 0.121.99\cdot 10^{30}}{4\pi^2}\cdot(11.2\cdot 24\cdot 3600)^2} = 7.36\cdot 10^9 m$$

El radio es $7.36\cdot 10^9 m$

Pregunta 2

a) Considera la ecuación de la onda transversal que va en sentido negativo del eje X

$$y(x,t) = A\,sen(\omega t + kx + \varphi_0)$$

Gracias a los datos de la frecuencia angular y la velocidad propagación:

$$v_p = \frac{\lambda}{t} : \begin{cases} \omega = \dfrac{2\pi}{T} \\ k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \end{cases} \Rightarrow v_p = \frac{\omega}{k} \Rightarrow k = \frac{\omega}{v_p} = \frac{\frac{\pi}{3}}{10} = \frac{\pi}{30} m^{-1}$$

Para calcular la fase inicial:

$$\begin{cases} y(x,t) = A\,sen(\omega t + kx + \varphi_0) \\ v(x,t) = A\omega\cos(\omega t + kx + \varphi_0) \end{cases} en\ x = 0\ y\ t = 0\ \begin{cases} y_0 = Asen(\varphi_0) \\ v_0 = A\omega sen(\varphi_0) \end{cases}$$

$$\frac{y_0}{v_0} = \frac{1}{\omega}\cdot tag(\varphi_0) \Rightarrow tag(\varphi_0) = \frac{y_0\cdot\omega}{v_0} = \frac{\frac{6}{\pi}\cdot\frac{\pi}{3}}{1} = 2 \Rightarrow \varphi_0 = \begin{cases} 1.1\,rad \\ \pi + 1.1\text{rad} \end{cases}$$

Para decidir cuál de los dos valores, observamos que la velocidad y la elongación inicial deben ser positivos por lo que $\varphi_0 = 1.1\,rad$.

Conoida la fase inicial, calculamos la amplitud:

$$y_0 = A sen(\varphi_0) \Rightarrow A = \frac{y_0}{sen(\varphi_0)} = \frac{6/\pi}{sen(1.1)} = 2.14\cdot 10^{-2}\text{m}$$

La ecuación de la onda es:

$$y(x,t) = 2.14\cdot 10^{-2}\,sen(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{30}x + 1.1)\,m$$

b) La velocidad de la onda es:

$$v(x,t) = A\omega\cos(\omega t + kx + \varphi_0)$$

Calculamos la velocidad en el instante dado:

$$v\left(\frac{\lambda}{4},0\right) = 2.14\cdot 10^{-2}\cdot\frac{\pi}{3}\cos\left(\omega\cdot 0 + k\cdot\frac{\lambda}{4} + 1.1\right) = \left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right) =$$
$$= 2.14\cdot 10^{-2}\cdot\frac{\pi}{3}\cos(\omega\cdot 0 + \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{4} + 1.1) = -0.02\,{}^{m}/{}_{s}$$

La velocidad es: -0.02 ${}^{m}/{}_{s}$

Pregunta 3

a) Para que un protón se desplace en un movimiento rectilínea y uniforme, la suma de las fuerzas ha de ser 0. Con lo que:

$$\vec{F_B} + \vec{F_E} = 0 \Rightarrow \vec{F_B} = -\vec{F_E}$$

$$\vec{F_B} = q\left(\vec{v} x \vec{B}\right)$$

$$\vec{F_E} = q \cdot \vec{E}$$

$$q\left(\vec{v} x \vec{B}\right) = -q \cdot \vec{E} \Rightarrow -\vec{E} = \left(\vec{v} x \vec{B}\right)$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} \qquad \vec{E} = -E_y \vec{j} \qquad \vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -E_y \vec{j} \Rightarrow -v_x \begin{vmatrix} \vec{j} & \vec{k} \\ B_y & B_z \end{vmatrix} = -E_y \vec{j} \Rightarrow v_x B_z \vec{j} - v_x B_y \vec{k} = E_y \vec{j}$$

$$\begin{cases} j: v_x B_z = E_y \Rightarrow B_z = \dfrac{E_y}{v_x} = \dfrac{-100}{5} = -20T \\ k: v_x B_y = 0 \Rightarrow como\ v_x \neq 0 \Rightarrow B_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{B} = -20\vec{k}\ T$$

El campo es en dirección negativo del eje OZ, y en módulo es 20T

b) Si eliminamos el campo eléctrico, la única fuerza que actuara sobre el protón será la debida al campo magnético, provocando un movimiento circular uniforme. Si el protón describe un movimiento circular uniforme, la resultante será igual a la fuerza centrípeta

$$\left|\vec{F_B}\right| = \left|\vec{F_c}\right| \Rightarrow qvB = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{qB} = \frac{1.67 \cdot 10^{-27} \cdot 5}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 20} = 2.61 \cdot 10^{-9}\, m$$

El radio es $2.61 \cdot 10^{-9}\, m$

Pregunta 4

a) Los ángulos de refracción se calculan mediante la ley de Snell, y las longitudes de onda mediante la definición del índice de refracción:

$$n_0 \cdot sen(\hat{i}) = n_1 \cdot sen(\hat{r})$$

Luz violeta

$$n_0 \cdot sen(\hat{i}) = n_v \cdot sen(\hat{r_v}) \Rightarrow sen(\hat{r_v}) = \frac{n_0 \cdot sen(\hat{i})}{n_v} = \frac{1 \cdot sen(60°)}{1.66} = 0.5217$$

$$\hat{r_v} = arcsen(0.5217) = 31.45°$$

Luz roja

$$n_0 \cdot sen(\hat{i}) = n_r \cdot sen(\hat{r_r}) \Rightarrow sen(\hat{r_r}) = \frac{n_0 \cdot sen(\hat{i})}{n_r} = \frac{1 \cdot sen(60°)}{1.60} = 0.5412$$

$$\hat{r_r} = arcsen(0.5412) = 32.8°$$

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0 \cdot f}{\lambda \cdot f} = \frac{\lambda_0}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{\lambda_0}{n} \; (\lambda_0 = 400, longitud\ de\ onda\ en\ el\ aire)$$

Luz violeta

$$\lambda_v = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{400}{1.66} = 241nm$$

Luz roja

$$\lambda_r = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{400}{1.60} = 469nm$$

b) El ángulo límite es el ángulo de incidencia que corresponde a un águlo de refracción de 90°. Si el ángulo de incidencia es mayor o igual a dicho ángulo, se produce reflexión total.

$$n_1 \cdot sen(\hat{\ell}) = n_2 \cdot sen(90°)$$

$$sen(\hat{\ell}) = \frac{n_2}{n_1}$$

Luz violeta

$$sen(\hat{\ell_v}) = \frac{n_0}{n_1} = \frac{1}{1.66} \Rightarrow \hat{\ell_v} = arcsen(\frac{1}{1.66}) \approx 37°$$

Luz roja

$$sen(\hat{\ell_r}) = \frac{n_0}{n_1} = \frac{1}{1.60} \Rightarrow \hat{\ell_r} = arcsen(\frac{1}{1.60}) \approx 39°$$

Para saber si el rayo que incide ese refracta en la lámina o no, comparamos el ángulo de incidencia con el ángulo de incidencia límite $\hat{i'}$:

$\hat{i'} < \hat{\ell}$ El rayo se refracta por la cara inferior y sale al aire.

$\hat{i'} \geqslant \hat{\ell}$ El rayo no se refracta por la cara inferior, sufre reflexión total y no sale al aire.

Para calcular $\hat{i'}$ usamos un complementario $\hat{r}$

$$\hat{i'} + \hat{r} = 90°$$

Luz violeta

$$\hat{i'_v} = 90 - \hat{r'_v} = 90° - 31.45° = 58.55° > \hat{\ell_v}\ .No\ se\ refracta$$

Luz roja

$$\hat{i'_r} = 90 - \hat{r'_r} = 90° - 32.8° = 57.2° > \hat{\ell_r}\ .No\ se\ refracta$$

Pregunta 5

a) La energía de los fotones incidentes se calcula con la ecuación de Planck:

$$E = h \cdot f = \left(f = \frac{c}{\lambda}\right) = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6.63 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{3 \cdot 10^{8}}{150 \cdot 10^{-9}} = 1.33 \cdot 10^{-18} J$$

Gracias a que la energía máxima es la que se obtiene del potencial de frenado (V_0)

$$E_c = q_e \cdot V_0 = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1.25 = 2 \cdot 10^{-19} J$$

La energía cinética máxima es $2 \cdot 10^{-19} J$

b) La longitud de onda mediante la ecuación de De Broglie

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow mv^2 = 2E_c \Rightarrow m^2v^2 = 2mE_c \Rightarrow mv = \sqrt{2mE_c}$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 10^{-19} \cdot 9.1 \cdot 10^{-31}}} = 1.1 \cdot 10^{-9} m$$

La longitud de onda es: $1.1 \cdot 10^{-9} m$